

Die Radontransformation in der digitalen Bildverarbeitung

The Radon Transform in Digital Image Processing

Jürgen Beyerer und Fernando Puente León

Herrn Prof. Dr.-Ing. Franz Mesch zum 70. Geburtstag gewidmet

Die Radontransformation entwickelt ein zu transformierendes Bild nach einem „Funktionensystem“ bestehend aus δ -Geraden. Damit stellt die Radontransformierte eines Signales $b(x_1, x_2)$ die Menge aller Parallelprojektionen von $b(x_1, x_2)$ dar. Die Radontransformation konzentriert geradenhafte Signalanteile in ausgeprägte Extrema, die sich sicher detektieren lassen. Die Lagekoordinaten dieser Peaks sind verlässliche Schätzwerte der geometrischen Bestimmungsstücke kollinear Strukturen. Der Aufsatz diskutiert quantitativ den Gewinn an Signal-zu-Rauschverhältnis durch Anwendung der Radontransformation. Daneben wird gezeigt, wie die Radontransformation zur Bildverbesserung eingesetzt werden kann. Weitere Themen sind die effiziente Implementierung mit Hilfe des Zentralschnitt-Theorems, der Zusammenhang mit der Houghtransformation sowie Anwendungsbeispiele.

The Radon transform develops an image according to a “system of functions” consisting of δ -lines. Thus, the Radon transform of a signal $b(x_1, x_2)$ represents the set of all parallel projections of $b(x_1, x_2)$. The Radon transform maps linear signal components onto pronounced extrema which can be detected very robustly. The coordinates of these peaks are reliable estimates of the geometrical parameters of collinear structures. In the paper, the increase of the signal-to-noise ratio for such structures in the Radon domain is discussed quantitatively. Moreover, the application of the Radon transform for image enhancement is demonstrated. Further topics concern its efficient implementation based on the central slice theorem, the connection with the Hough transform as well as examples on more complex applications.

Schlagwörter: Radontransformation, Zentralschnitt-Theorem, Houghtransformation, verallgemeinerte Kreuzkorrelationsfunktion, Bildverbesserung, Liniendetektion

Keywords: Radon transform, central slice theorem, Hough transform, generalized cross-correlation function, image enhancement, line detection

1 Einleitung

Die von Johann Radon 1917 definierte und später nach ihm benannte lineare Integraltransformation [9] spielt seit Ende der sechziger Jahren, nachdem ausreichend Rechenleistung verfügbar war, eine fundamentale Rolle in der Computertomographie zur Rekonstruktion von 2D-Funktionen aus eindimensionalen Projektionen. Trotz ihrer langen Geschichte und ihren vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten [5] führt die Radontransformation im Bereich der Bildverarbeitung noch eher ein Schattendasein.

Dabei besitzt die Radontransformation viele interessante Eigenschaften, die sie als Werkzeug für die digitale Bildverarbeitung und -auswertung attraktiv machen. Dem Anwender hilft hierbei besonders die anschauliche geometrische Deutbarkeit der Radontransformation, die es erlaubt, diese geplant konstruktiv bei der Lösung von Bildverarbeitungsaufgaben einzusetzen. Vorteilhaft ist auch der enge Zusammenhang mit der zweidimensionalen Fouriertransformation über das Zentralschnitt-Theorem. Mathematisch öffnet sich hierüber ein Fenster zur linearen Systemtheorie, die mit ihrer Klarheit und Durchschaubarkeit die

Radontransformation aus einem weiteren Blickwinkel anschaulich zu interpretieren gestattet. Praktisch ermöglicht das Zentralschnitt-Theorem eine effiziente Berechnung der Radontransformation mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation. Der Umstand, dass speziell bei Aufgaben der automatischen Sichtprüfung geradenhafte Strukturen eine ganz wesentliche Rolle spielen, macht die Radontransformation für viele Anwendungsfälle zu einem wertvollen Werkzeug.

2 Grundlagen

2.1 Definition der Radontransformation

Die Radontransformierte $r(u, \varphi) = \mathcal{R}\{b(\mathbf{x})\}$ eines Signales $b(\mathbf{x}) = b(x_1, x_2)$ über dem Ort $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ist definiert als:

$$r(u, \varphi) = \mathcal{R}\{b(\mathbf{x})\} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u) d\mathbf{x} \quad (1)$$

mit

$$\varphi \in [0^\circ, 180^\circ), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Die als Transformationskern fungierende δ -Gerade

$$\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u) \text{ „}=\text{“ } \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u \neq 0 \\ \infty & \text{für } \mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u = 0 \end{cases}$$

sorgt dafür, dass die Werte des Signales $b(\mathbf{x})$ längs Geraden mit den Parametern u (Ursprungsabstand) und φ (Geradenwinkel) aufsummiert werden; siehe Bild 1.

Für einen festen Winkel φ_0 ist somit $r(u, \varphi_0)$ gleich der Parallelprojektion des Signales in φ_0 -Richtung. Variiert man φ über den ganzen Definitionsbereich, erkennt man unmittelbar, dass die Radontransformierte alle Parallelprojektionen des Signales $b(\mathbf{x})$ in geordneter Weise enthält. Die geometrische Struktur des Transformationskerns bewirkt, dass geradenhafte Signalanteile konstruktiv aufintegriert werden und im u, φ -Bereich sich als ausgeprägte Extrema manifestieren. Die Bilder 5 (Mitte) und 5 (rechts), welche die

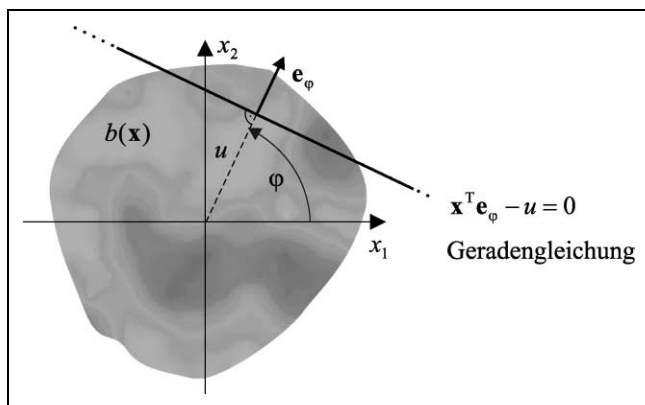


Bild 1: Delta-Gerade als Transformationskern der Radontransformation.

Riefentexturen einer gestoßenen und einer gehonten Oberfläche zeigen, illustrieren diesen Sachverhalt.

Die Radon-Rücktransformation lautet:

$$b(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^{-1}\{r(u, \varphi)\} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u)} \frac{\partial r(u, \varphi)}{\partial u} du d\varphi. \quad (2)$$

Sie liefert das Signal $b(\mathbf{x})$ bei gegebenen Projektionsdaten $r(u, \varphi)$. Geeignete Ansätze zur praktischen Berechnung der Gleichungen (1) und (2) werden in Abschnitt 3.5 besprochen.

2.2 Beispiel Computer-Tomographie (CT)

Als praktisches Beispiel zur Radontransformation sei das Prinzip der Computer-Tomographie (CT) kurz erläutert; siehe Bild 2. Eine von einem Senderarray ausgehende Röntgenstrahlung mit der Anfangsintensität I_0 durchdringt ein Objekt mit örtlich variierendem Absorptionskoeffizienten $\mu(\mathbf{x})$, so dass die vom Empfängerarray gemessene Strahlung $I(u, \varphi)$ gemäß folgender Gleichung abgeschwächt wird:

$$I(u, \varphi) = I_0 \exp\left(-\iint \mu(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u) d\mathbf{x}\right).$$

Nach Division durch I_0 und Logarithmierung entsprechen die Messdaten einem Linienintegral über den Absorptionskoeffizienten $\mu(\mathbf{x})$ längs der Strahlen – also der Radontransformierten $\mathcal{R}\{\mu(\mathbf{x})\}$ der Funktion $\mu(\mathbf{x})$:

$$-\ln\left(\frac{I(u, \varphi)}{I_0}\right) = \iint \mu(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u) d\mathbf{x} = \mathcal{R}\{\mu(\mathbf{x})\}.$$

Um die Funktion $\mu(\mathbf{x})$ hinreichend präzise zu rekonstruieren, muss in der Computer-Tomographie die Absorption entlang vieler Linien mit unterschiedlichen Richtungen gemessen und anschließend die Radon-Rücktransformation auf die Messdaten angewandt werden [10].

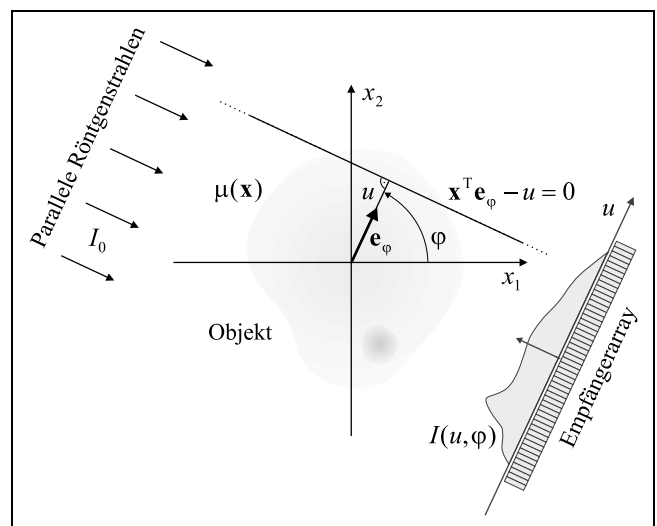


Bild 2: Prinzip der Computer-Tomographie.

3 Die Radontransformation in der Bildverarbeitung

3.1 Rolle der Radontransformation

Wie in Abschnitt 2.2 erläutert, möchte man in der Computer-Tomographie aus den gemessenen Projektionen $r(u, \varphi)$ einer interessierenden Funktion eben diese Funktion rekonstruieren. Die Radontransformation stellt hierbei eine physikalische Realität dar, da man die Radontransformierte $r(u, \varphi)$ als Rohdaten erhält; siehe Bild 3. Bei der Bildverarbeitung hingegen spielt die Radontransformation vielmehr als Werkzeug eine Rolle, mit dem sich gezielt ge-

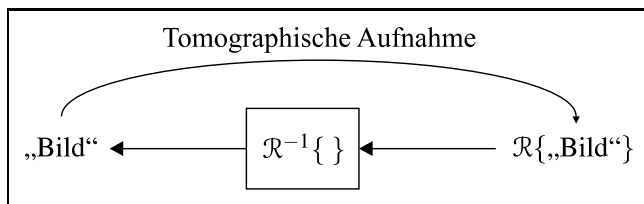


Bild 3: Rolle der Radontransformation in der Computer-Tomographie.

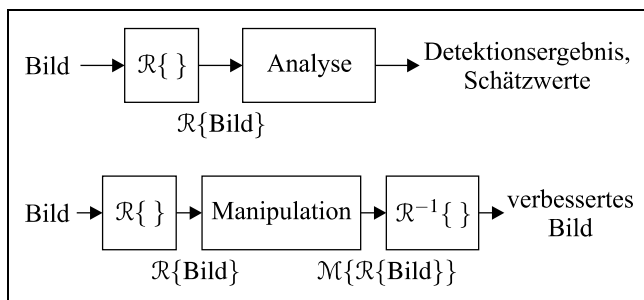


Bild 4: Rolle der Radontransformation in der Bildverarbeitung. Oben: Detektion und Parameterschätzung; unten: Bildverbesserung.

radenhafte Bildstrukturen manipulieren und herausarbeiten lassen; siehe Bild 4. Anwendungsbeispiele der Radontransformation bei der Bildverbesserung und Detektion werden in Abschnitt 4 vorgestellt.

3.2 Gegenüberstellung von Fourier- und Radontransformation

So wie die zweidimensionale Fouriertransformation

$$B(\mathbf{f}) = \mathcal{F}\{b(\mathbf{x})\} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\mathbf{x}) e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3)$$

mit ihrem periodischen Kern $e^{-j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{x}}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, besonders geeignet ist, periodische Signalanteile auszuwerten, ist die Radontransformation prädestiniert, geradenhafte Strukturen zu untersuchen. Zwar bilden die Delta-, Funktionen $\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u)$ kein orthogonales „Funktionensystem“ wie der Kern der Fouriertransformation, doch führt die Koinzidenz einer δ -Geraden des Integrationskerns mit einer Geraden im zu analysierenden Signal zu einem ausgeprägten Korrelationspeak in der Radontransformierten, der dann eine statistisch sicherere Detektion der Geraden als im Ortsbereich erlaubt.

Um die Fähigkeit der Fourier- und Radontransformation zu demonstrieren, periodische bzw. geradenhafte Signalanteile zu konzentrieren, ist in Bild 5 die Wirkung dieser Transformationen auf drei Riefentexturen exemplarisch dargestellt. Bild 5 (links) zeigt oben eine stirnplangefräste Oberfläche und unten den zugehörigen Betrag der zweidimensionalen Fouriertransformation, bei welchem die ausgeprägte Periodizität der Riefen deutlich zu erkennen ist. Die anderen Beispiele zeigen eine Stoßtextur (Mitte) und eine Hontextur (rechts) sowie ihre jeweiligen Radontransformierten. Hierbei wird jede Riefe auf einen Peak abgebildet. Scharen

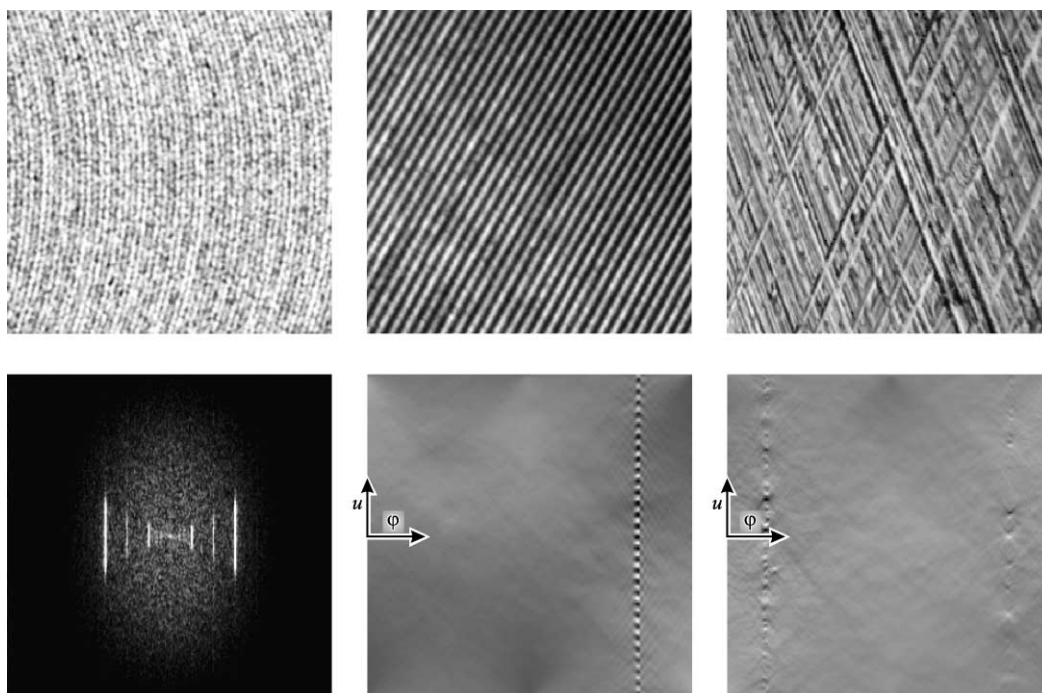


Bild 5: Gegenüberstellung Fourier- und Radontransformation. Links: Stirnplanfrästextur (oben) und Betrag der Fouriertransformation (unten); Mitte: Stoßtextur (oben) mit Radontransformation (unten); rechts: Hontextur (oben) mit Radontransformation (unten).

paralleler Riefen kommen im Radonbereich auf Geraden parallel zur u -Achse zu liegen. Die Koordinaten u, φ der Peaks geben die geometrischen Bestimmungsstücke der zugehörigen Riefe im Ortsbereich exakt wieder.

3.3 Signal-zu-Rausch-Verhältnisse (SNR)

Bei der Radontransformation wird eine geradenhafte Struktur gewissermaßen auf ein sehr kleines Gebiet im Radonbereich konzentriert. Die Lagekoordinaten u bzw. φ eines mit einer Geraden im Ortsbereich korrespondierenden Extremums sind sehr gute Schätzwerte für den Ursprungsabstand bzw. den Geradenwinkel.

Um den statistischen Vorteil durch Anwendung der Radontransformation quantitativ zu zeigen, sei eine additive Verknüpfung

$$b(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x}) \tag{4}$$

für ein geradenhaftes Nutzsignal $s(\mathbf{x})$ und ein störendes Hintergrundbild $n(\mathbf{x})$ angenommen; siehe Bild 6 links.

Im Folgenden werden das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) des Bildes vor und nach der Radontransformation verglichen:

Vorher: $SNR\{b(\mathbf{x})\} = \frac{s^2}{\sigma^2}$;

Nachher: $SNR\{r(u, \varphi)\} \approx \frac{(sL)^2}{L^2 \sigma^2 \frac{\kappa}{L}} = \frac{s^2 L}{\sigma^2 \kappa}$.

Hierbei sind: $\sigma^2 = \text{Var}\{n(\mathbf{x})\}$, κ : Korrelationslänge von $n(\mathbf{x})$, s : Amplitude von $s(\mathbf{x})$ und $L(u, \varphi) = \mathcal{R}\{a(\mathbf{x})\}$ mit $a(\mathbf{x})$: Aperturfunktion von $b(\mathbf{x})$; siehe Bild 6 (rechts). $L(u, \varphi)$ ist nichts anderes als die Länge des Integrationsweges des Radonintegrals innerhalb des Bildes $b(\mathbf{x})$. Das SNR verbessert sich durch die Radontransformation um den Faktor:

$$\frac{SNR\{r(u, \varphi)\}}{SNR\{b(\mathbf{x})\}} \approx \frac{L(u, \varphi)}{\kappa} \tag{5}$$

was besonders bei Geradenstücken, die wesentlich länger als die Korrelationslänge des Hintergrundes sind, einen erheblichen Vorteil für die Signalauswertung bedeutet.

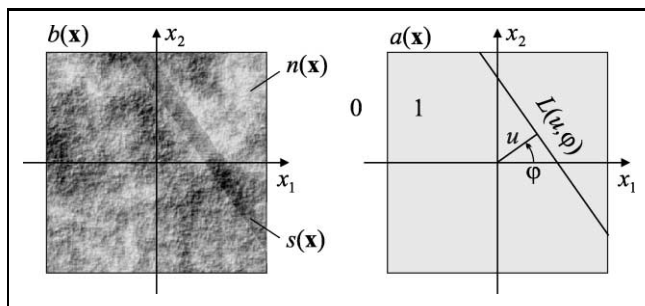


Bild 6: Links: Geradenhafte Struktur eingebettet in störende Hintergrundtextur. Rechts: Definition von Aperturfunktion $a(\mathbf{x})$ und Projektionslänge L .

3.4 Das Zentralschnitt-Theorem

Für die praktische Nutzung der Radontransformation von großer Bedeutung ist das Zentralschnitt-Theorem, das einen Zusammenhang zur Fouriertransformation Gl. (3) herstellt und in Bild 7 veranschaulicht wird. Es besagt, dass eine Parallelprojektion des Signales $b(\mathbf{x})$ über eine eindimensionale Fouriertransformation mit einem zentralen Schnitt senkrecht zur Projektionsrichtung durch die zweidimensionale Fouriertransformierte $B(\mathbf{f}) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}\{b(\mathbf{x})\}$ verknüpft ist:

$$\mathcal{F}_u\{r(u, \varphi)\} = B(f_u \mathbf{e}_\varphi) \tag{6}$$

wobei f_u die mit u korrespondierende Ortsfrequenz ist. Dieser Satz erlaubt es, mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation (FFT) und einer Interpolation von rechtwinkligen auf polare Koordinaten die Radontransformation sehr effizient zu berechnen; siehe Abschnitt 3.5.

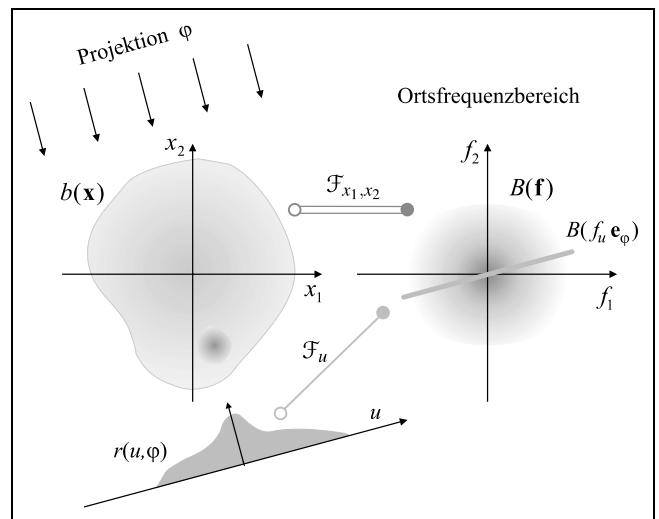


Bild 7: Veranschaulichung des Zentralschnitt-Theorems.

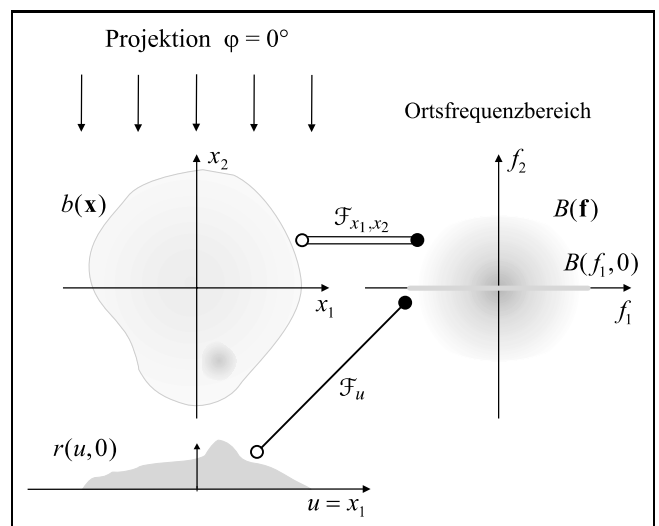


Bild 8: Zur Herleitung des Zentralschnitt-Theorems.

Zur Herleitung von Gl. (6) wird die Radontransformierte des Bildes $b(\mathbf{x})$ für $\varphi = 0^\circ$ gemäß Bild 8 berechnet:

$$\begin{aligned} r(u, \varphi = 0) &= \iint b(\mathbf{x})\delta(x_1 - u)dx \\ &= \int b(u, x_2)dx_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Durch Fouriertransformation bzgl. u erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u\{r(u, 0)\} &= \iint b(u, x_2)e^{-j2\pi f_u u} du dx_2 \\ &= \iint b(x_1, x_2)e^{-j2\pi f_1 x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \iint b(x_1, x_2)e^{-j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} dx_1 dx_2 \Big|_{f_2=0} \\ &= B(f_1, 0) = B(f_1 \mathbf{e}_x) = B(f_u \mathbf{e}_\varphi) \Big|_{\varphi=0^\circ}. \end{aligned} \quad (8)$$

Eine Drehung der Funktion $b(\mathbf{x})$ im Ortsbereich entspricht einer ebensolchen Drehung der Fouriertransformierten $B(\mathbf{f})$:

$$\mathcal{F}\{b(\mathbf{D}\mathbf{x})\} = B(\mathbf{D}\mathbf{f}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Zusammen mit Gl. (8) folgt daraus unmittelbar Gl. (6).

3.5 Effiziente Berechnung der Radontransformation

Bild 9 zeigt eine Strategie zur praktischen Berechnung der Radontransformation mittels des Zentralschnitt-Theorems. Nach einer 2D-Fouriertransformation des Ursprungsbildes $b(\mathbf{x})$ wird das komplexe Spektrum $B(\mathbf{f})$ auf einem polaren Raster bilinear interpoliert. Das Ergebnis der Interpolation wird sodann „spaltenweise“ einer eindimensionalen inversen Fouriertransformation bzgl. der Koordinate u unterzogen, wodurch bereits die Radontransformierte erhalten wird.

Für den Einsatz der Radontransformation zur Bildverbesserung ist ebenfalls die Rücktransformation von großer Bedeutung. Hierbei kann die Vorgehensweise gemäß Bild 9 einfach invertiert werden: Nach einer 1D-FFT bzgl. des Parameters u erfolgt eine Interpolation auf einem kartesischen Raster; auf das Ergebnis wird schließlich eine inverse 2D-FFT angewandt.

Im Folgenden soll der Rechenzeitvorteil bei der Berechnung der Radontransformation über das Zentralschnitt-Theorem abgeschätzt werden. Hier soll für die Bildgröße $N \times N$ angenommen werden, dass $N = N_\varphi = N_u$,

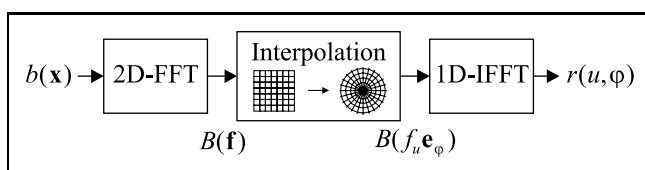


Bild 9: Effiziente Berechnung der Radontransformation mittels des Zentralschnitt-Theorems und der FFT.

Tabelle 1: Gewinn bei der Berechnung der Radontransformation über das Zentralschnitt-Theorem.

Bildgröße $N \times N$	256 × 256	512 × 512	1024 × 1024
Aufwand _{Radon} = $O(N^3)$	≈ 10	≈ 18	≈ 32
Aufwand _{ZST} = $O(N^2 \ln N)$			

wobei N_φ bzw. N_u die Anzahlen der Quantisierungsschritte für φ bzw. u sind. Bei direkter Auswertung des Radonintegrals ist die Ordnung des Rechenaufwands $O(N^3)$; bei Berechnung via Zentralschnitt-Theorem hingegen nur $O(N^2 \ln N)$. Besonders für große Werte von N führt die Methode gemäß Bild 9 zu einer erheblichen Rechenzeitersparnis, wie in Tabelle 1 für typische Werte gezeigt wird.

3.6 Abtasttheorem der Computer-Tomographie

Beim Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten im Ortsfrequenzbereich liegt systemtheoretisch betrachtet ein Abtastproblem vor. An den Gitterpunkten des Polarrasters, die mit den Gitterpunkten des rechtwinkligen Rasters nicht zusammenfallen, muss zunächst der komplexe Wert der Fouriertransformierten aus den benachbarten Stützstellen der FFT rekonstruiert (d. h. interpoliert) und entnommen werden. Um hier Bandüberlappungsfehler klein zu halten, müssen im nicht äquidistanten Raster der Polarkoordinaten die Abstände der Abtastpunkte auch im ungünstigsten Falle hinreichend dicht liegen. Bild 10 veranschaulicht vereinfacht die Zusammenhänge. Geht man davon aus, dass bei der Gewinnung des digitalen Bildes $b(\mathbf{x})$ im Ortsbereich das Nyquistsche Abtasttheorem eingehalten oder übererfüllt wurde, ist nur ein zentraler Teilbereich (im Beispiel ein Quadrat der Kantenlänge Q) der Fourierebene mit nichtverschwindenden Werten belegt. Der ungünstigste Fall für die polare Abtastung liegt nun an den am weitesten vom Ortsfrequenzursprung entfernten Punkten dieses Teilbereiches vor. Die angulare Schrittweite $\Delta\varphi$ muss hier noch

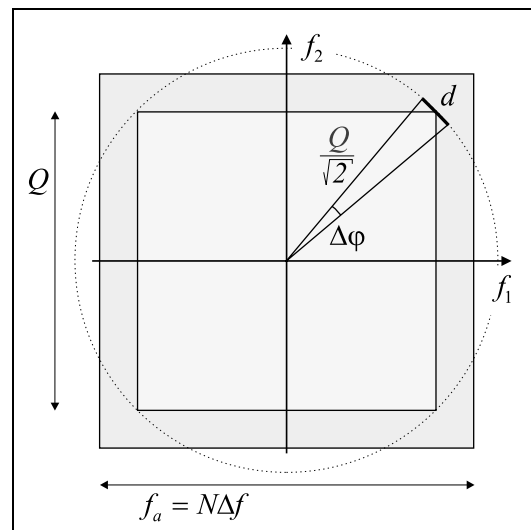


Bild 10: Zum Abtasttheorem der Computer-Tomographie.

klein genug sein, damit die Distanz d zwischen benachbarten Abtastwerten kleiner als die Ortsfrequenzauflösung Δf der zweidimensionalen FFT bleibt. Daraus resultiert die Forderung [1]:

$$d = \Delta\varphi \frac{Q}{2} \sqrt{2} \stackrel{!}{\leq} \Delta f. \tag{9}$$

Mit $\Delta\varphi = \pi/N_\varphi$ und $\Delta f = f_a/N$ folgt hieraus das Abtasttheorem der Computer-Tomographie:

$$N_\varphi \geq \frac{N\pi}{\sqrt{2}\ddot{u}}, \tag{10}$$

wobei $\ddot{u} := f_a/Q \geq 1$ den Grad der Übererfüllung des Abtasttheorems des Bildes $b(\mathbf{x})$ beschreibt.

4 Anwendungsbeispiele

4.1 Bildverbesserung (Hervorhebung von Linien)

Als erstes Beispiel der Anwendung der Radontransformation in der Bildverarbeitung sei hier die Verstärkung lokal geradenhafter Signalanteile zur Bildverbesserung von Bild-daten mit geringem SNR genannt. Bild 11 zeigt oben als Ausgangssituation zwei SAR-Aufnahmen der Meeresoberfläche, auf der die Spuren der Bugwellen zweier Schiffe [6] bzw. eine Detailaufnahme einer Welle [8] zu sehen sind. Zur Bildverbesserung wurde die Radontransformation auf das mittelwertfreie Bild und darauf dann die Punktoperation $\text{sign}\{r\}|r|^p$ angewandt. Geradenhafte Strukturen, die in der u, φ -Ebene ja in lokale Extrema abgebildet werden, werden durch obige Operation für $p > 1$ gegenüber den Rauschteilen vorzeichenrichtig verstärkt. Bild 11 zeigt unten die Ergebnisse für $p = 2$ nach anschließender Radon-Rücktransformation. In beiden Fällen sind nun die Spuren wesentlich rauschärmer erkennbar.

Man beachte, dass die gängigen Operatoren zur Kanten- und Liniendetektion aufgrund ihres differenzierenden Charakters das Rauschen verstärken würden. Die hier gezeigte, Radontransformations-basierte Vorgehensweise hat gewissermaßen integrierenden Charakter und ist daher vorteilhaft bei Bildern mit geringem SNR.

4.2 Riefendetektion an technischen Oberflächen

Im nächsten Anwendungsbeispiel geht es um die Riefendetektion an technischen Oberflächen. Hierbei wird die interessierende Oberflächentextur einer Radontransformation unterzogen, welche die Riefen auf Peaks im u, φ -Bereich abbildet. Die endliche Bildapertur $a(\mathbf{x})$ erzeugt im Radonbereich Inhomogenitäten; siehe Bild 5 (rechts). Um den Einfluss von $a(\mathbf{x})$ auf die Peakhöhe zu kompensieren, wird die Radontransformierte durch die Integrationslänge $L(u, \varphi)$ dividiert, was bei Detektion mit konstantem Schwellwert auf eine konstante Detektionswahrscheinlichkeit führt. Soll hingegen eine konstante Falschalarmwahrscheinlichkeit erzielt werden, so kann – bei Annahme eines additiven Rauschprozesses – alternativ eine Normierung auf $\sqrt{L(u, \varphi)}$ erfolgen; siehe [2].

4.3 Detektion defekter Riefen in einer Hontextur

Ein etwas aufwändigeres Sichtprüfungsproblem ist die Detektion defekter Riefen in Texturen gehonter Zylinderlaufbahnen [3]. Die Riefen fungieren hier als feine Ölkanäle und -reservoirs und sind wesentlich für das Betriebsverhalten eines Kolbenmotors. Ungünstig ist es, wenn sie teilweise zugeedrückt sind – sogenannter Blechmantel – wie dies in Bild 12 links zu sehen ist; siehe Pfeil. Um diese defekten Riefen vollautomatisch zu detektieren, wird

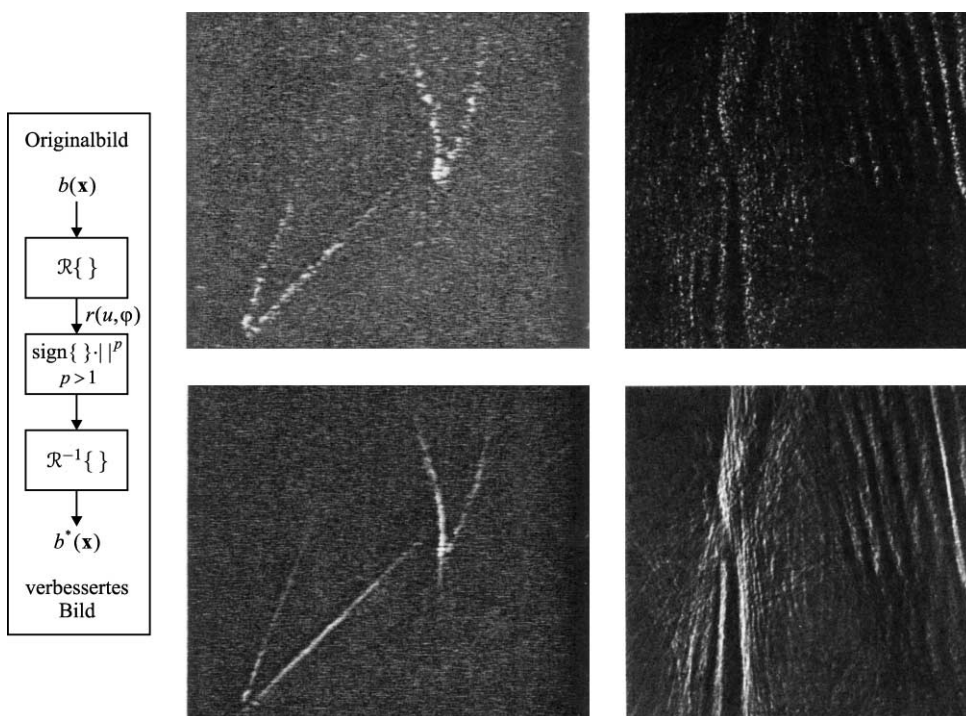


Bild 11: Beispiele zur Bildverbesserung (Hervorhebung von Linien) mit Hilfe der Radontransformation. Oben: Originalbilder; unten: Ergebnisse der Bildverbesserung für $p = 2$.

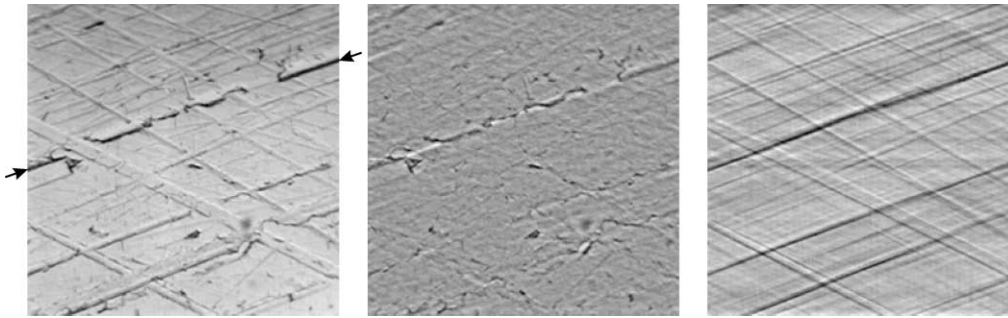


Bild 12: Separation von Riefen und Hintergrund. Links: Hontextur $b(\mathbf{x})$ mit Blechmantelriefen; Mitte: Hintergrundtextur $h(\mathbf{x})$ mit Defekten; rechts: Riefentextur $t(\mathbf{x})$.

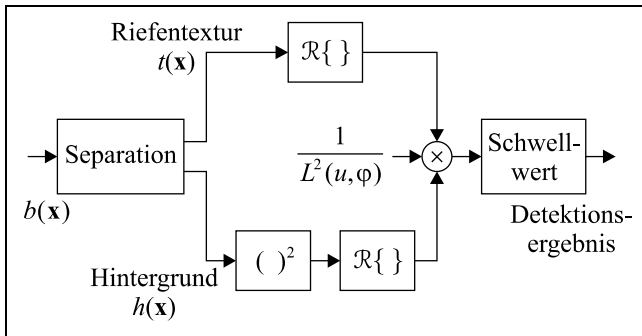


Bild 13: Algorithmus zur Detektion defekter Riefen.

gemäß Bild 13 zunächst das Ursprungsbild mit einem speziell dafür entwickelten Verfahren in eine Riefen- und eine Hintergrundtextur zerlegt, wie exemplarisch in Bild 12 dargestellt wird [4].

Die Riefen werden mittels Radontransformation herausgearbeitet. Die Defekte in der Hintergrundtextur werden durch Quadrieren gleichgerichtet. Kollinear liegende Defekte werden sodann mittels Radontransformation verstärkt. Die Multiplikation beider Zweige liefert dann ein Signal im u, φ -Bereich mit deutlichen Extrema ausschließlich für

defekte Riefen; siehe Bild 14(d). Das Detektionsresultat in Bild 14(f) zeigt, dass die defekten Riefen der Hontextur sicher gefunden wurden; vgl. Bild 12 (links).

5 Verallgemeinerung und Zusammenhänge

5.1 Radon- und Houghtransformation

Die bekannte Houghtransformation für Geraden [7] ist grob gesprochen ein Spezialfall der Radontransformation, nämlich für Binärbilder. Der Houghalgorithmus bedient sich hierbei einer speziellen Abzähltechnik für die zu einer Gerade gehörenden Bildpunkte, die letztlich mit der Integration der Radontransformation korrespondiert. Gegenüber der Houghtransformation kann die Radontransformation ganz zwanglos direkt auf Grauwertbilder angewendet werden. Außerdem lassen sich bequem im Fourierbereich effizient lineare Filteroperationen *en passant* durchführen.

Hierzu wird lediglich die 2D-FFT mit der gewünschten komplexen Übertragungsfunktion multipliziert, bevor die Abtastung auf dem Polarraster vorgenommen wird. Bild 15

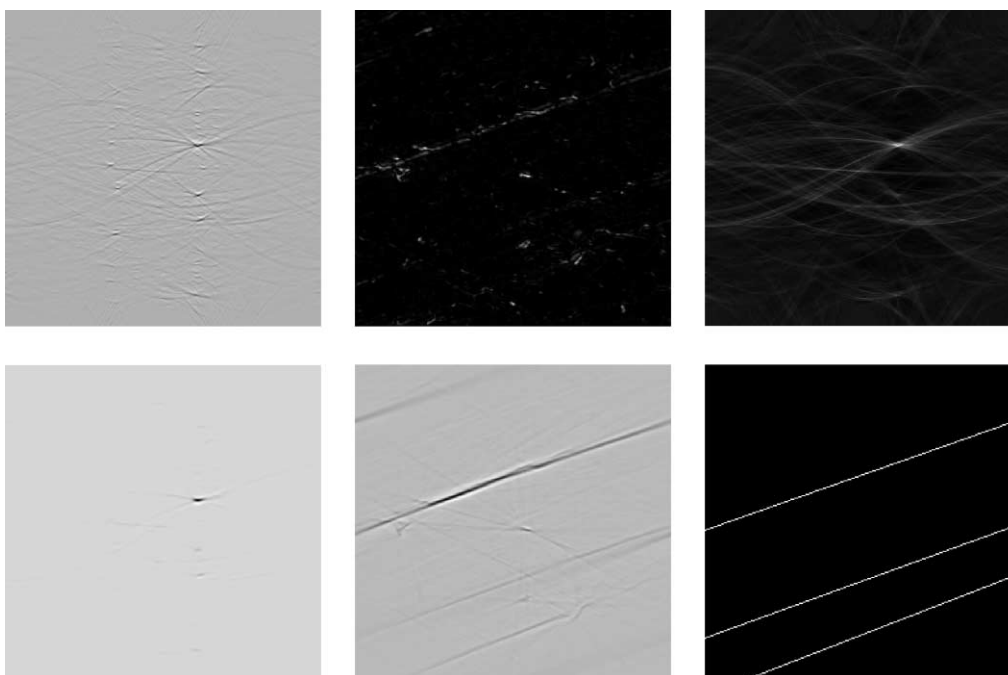


Bild 14: Beispiel zur Detektion defekter Riefen in einer Hontextur. Oben: (a) Radontransformierte der Riefentextur $\mathcal{R}\{t(\mathbf{x})\}$; (b) Hintergrundbild nach der Defektverstärkung $(h(\mathbf{x}))^2$; (c) Radontransformation von (b). Unten: (d) Multiplikation von (a) und (c); (e) inverse Radontransformation von (d); (f) anhand von Bild (d) detektierte defekte Riefen.

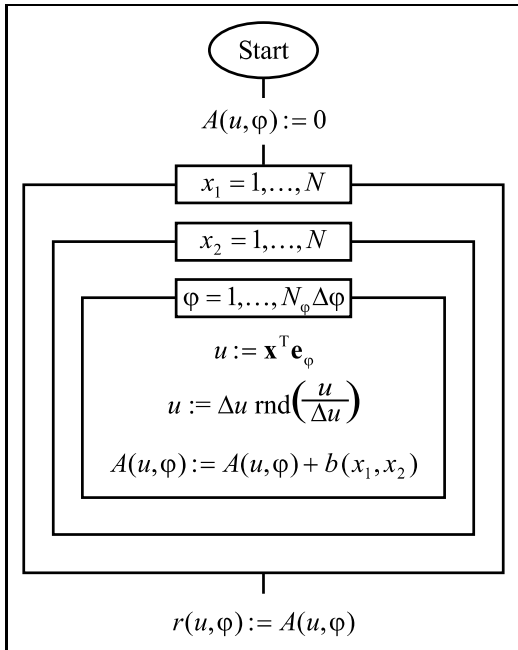


Bild 15: Algorithmus der Houghtransformation.

zeigt den Houghalgorithmus verallgemeinert für Grauwertbilder.

5.2 Verallgemeinerung für parametrische Kurven

Die Radontransformation kann für beliebige parametrische Kurven $C(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$ mit den Parametern $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K) \in \Pi$ verallgemeinert werden:

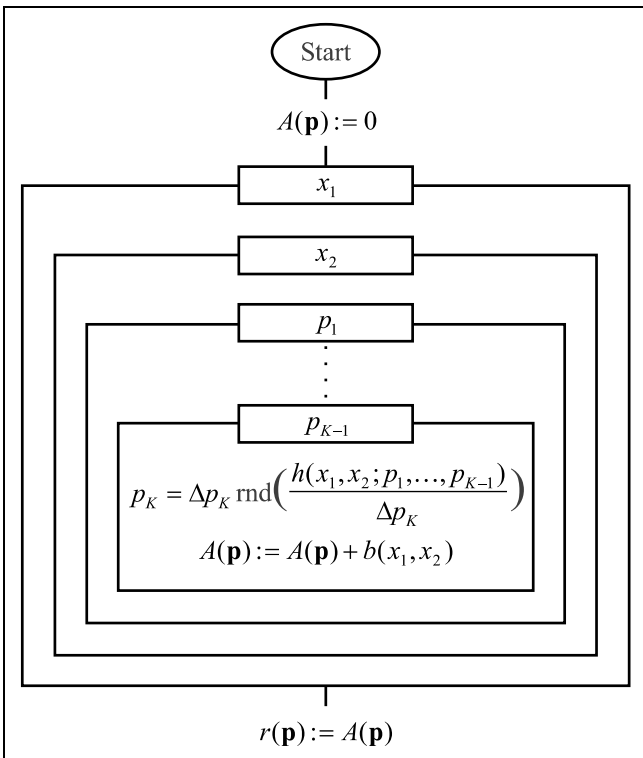


Bild 16: Algorithmus der verallgemeinerten Radontransformation für parametrische Kurven.

$$r(\mathbf{p}) = \iint b(\mathbf{x})\delta(C(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{p} \in \Pi. \tag{11}$$

$r(\mathbf{p})$ ist dann die Menge aller „Projektionen“ längs der Kurven $C(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \mathbf{p} \in \Pi$. Als Beispiel seien hier Kreise genannt:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - \rho^2 = 0, \\ \mathbf{p} = (a, b, \rho) \in \Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Als weiteres Beispiel erhält man für Ellipsen:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{[(x_1 - a) \cos \beta + (x_2 - b) \sin \beta]^2}{1 - \left[\frac{(x_2 - b) \cos \beta - (x_1 - a) \sin \beta}{d} \right]^2} - c^2 = 0, \\ \mathbf{p} = (a, b, c, d, \beta) \in \Pi = \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)^2 \times [0, \pi).$$

Für Gl. (11) existiert allerdings im Allgemeinen kein effizientes Berechnungsverfahren wie im Falle der Geraden. Bild 16 zeigt den Houghalgorithmus für parametrische Kurven hier verallgemeinert für Grauwertbilder.

5.3 Radontransformation als verallgemeinerte Kreuzkorrelationsfunktion

Eine weitere anschauliche Interpretation der Radontransformation und ihrer Verallgemeinerung für beliebige parametrische Kurven liefert die folgende Betrachtung: Gegeben sei ein parametrisches Muster $m(\mathbf{x}; \mathbf{p})$, dessen Signalenergie ohne Beschränkung der Allgemeinheit unabhängig vom Parametervektor \mathbf{p} sein soll; dies kann beispielsweise durch eine entsprechende Normierung sichergestellt werden. An ein gegebenes Bild $b(\mathbf{x})$ wird nun dieses Muster unter Variation von \mathbf{p} im Sinne der kleinsten Quadrate angepasst:

$$\overline{e^2} = \iint (b(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x}; \mathbf{p}))^2 \, d\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \text{Minimum}$$

Multipliziert man aus, so erhält man drei Summanden:

$$\overline{e^2} = \underbrace{\iint b^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \iint m^2(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}}_{\text{von } \mathbf{p} \text{ unabhängig, } > 0} - 2 \underbrace{\iint b(\mathbf{x})m(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}}_{\text{KKF}\{b, m\}(\mathbf{p})}$$

wobei der erste per se und der zweite per Voraussetzung von \mathbf{p} unabhängig ist. Demzufolge muß der dritte Summand minimal werden, um $\overline{e^2}$ zu minimieren. Das Integral kann als verallgemeinerte Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zwischen den Signalen $b(\mathbf{x})$ und $m(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ aufgefasst werden, wobei \mathbf{p} die Rolle eines verallgemeinerten Verschiebungs-

argumentes spielt. Minima von $\overline{e^2}$ treten somit an den Maxima dieser KKF auf – also dort, wo in korrelativen Sinne maximale Ähnlichkeit zwischen $b(\mathbf{x})$ und $m(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ herrscht.

Die Radontransformation und ihre Verallgemeinerung vergleichen ein Signal $b(\mathbf{x})$ gleichsam mit der Menge aller Muster $m(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \delta(C(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, die sich durch Variation über $\mathbf{p} \in \Pi$ ergeben. Die Werte der Radontransformierten bzw. ihrer Verallgemeinerung quantifizieren für jeden Parameterwert \mathbf{p} den Grad der Übereinstimmung zwischen $b(\mathbf{x})$ und $m(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \delta(C(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$.

6 Zusammenfassung

Die vornehmlich aus der Computer-Tomographie bekannte Radontransformation wird in diesem Aufsatz als nützliches Werkzeug für die Bildverarbeitung und -auswertung diskutiert. Unterschiedliche Blickwinkel auf das Thema liefern sich ergänzende Einsichten, die zusammengenommen die Radontransformation zu einem anschaulichen Signalverarbeitungshilfsmittel machen.

Aus geometrischer Sicht liefert die Radontransformation die Menge aller Parallelprojektionen eines Bildes in geordneter Form. Die δ -Geraden des Transformationskerns bewirken eine Integration längs Geraden, so dass kollineare Signalstrukturen stark konzentriert werden können.

Der Zusammenhang mit der Fouriertransformation verbindet die Radontransformation mit der linearen Systemtheorie. Das Zentralschnitt-Theorem macht die Wirkungsweise der Radontransformation im Ortsfrequenzbereich verständlich. Außerdem erlaubt dieses Theorem eine effiziente Berechnung der Radontransformation mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation.

Schließlich kann die Radontransformation auch als verallgemeinerte Kreuzkorrelationsfunktion aufgefasst werden, bei welcher der Transformationskern als parametrisches Muster variiert und mit dem Bildinhalt verglichen wird. Koinzidenzen zwischen Muster und Bild führen bei dieser Interpretation zu Korrelationsextrema.

Die anschauliche Deutung der Radontransformation erlaubt es dem Bildverarbeiter, sie heuristisch zur Lösung bestimmter Bildverarbeitungsaufgaben einzusetzen. An einem Bildverbesserungsverfahren und einem praktischen Beispiel aus der automatischen Sichtprüfung technischer Oberflächen wird diese Vorgehensweise sowie der praktische Nutzen der Radontransformation demonstriert.

Literatur

- [1] *Bamler, R.*: Mehrdimensionale lineare Systeme: Fourier-Transformation und δ -Funktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] *Beyerer, J.*: Analyse von Riefentexturen, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 390, VDI Verlag, Düsseldorf, 1994.
- [3] *Beyerer, J. und Puente León, F.*: Detection of defects in groove textures of honed surfaces, International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol. 37, No. 3, S. 371–389, 1997.
- [4] *Beyerer, J. und Puente León, F.*: Adaptive separation of random lines and background, Optical Engineering, Vol. 37, No. 10, S. 2733–2741, 1998.
- [5] *Deans, S.R.*: The Radon transform and some of its applications, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [6] *Hall, G., Terrel, T.J., Senior, J.M., Murphy, L.M.*: A new fast discrete Radontransform for enhancing linear features in noisy images, Proceedings Controller HMSO, London, S. 187–191, 1989.
- [7] *Leavers, V.F.*: Shape detection in computer vision using the Hough transform. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [8] *Murphy, L.M.*: Linear feature detection and enhancement in noisy images via the Radon transform, Pattern Recognition Letters 4, North Holland, S. 279–284, 1986.
- [9] *Radon, J.*: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften 29, S. 262–279, 1917.
- [10] *Trächtler, A.*: Tomographische Methoden in der Meßtechnik, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 897, VDI Verlag, Düsseldorf, 2001.

Manuskripteingang: 26. Februar 2002.



Dr.-Ing. habil. Jürgen Beyerer ist Geschäftsführer der Hottinger Systems GmbH, Mannheim, und Privatdozent an der Universität Karlsruhe (TH). Hauptarbeitsgebiete: Bildverarbeitung und automatische Sichtprüfung, Automatisierungstechnik, Robotik und Messtechnik.

Adresse: Hottinger Systems GmbH, Düsseldorfer Straße 20–28, D-68219 Mannheim-Rheinau, Tel.: (0621) 898-0580, Fax: (0621) 898-0555. E-Mail: beyerer@hottinger-kg.com



Dr.-Ing. Fernando Puente León ist wissenschaftlicher Assistent und Leiter der Gruppe „Informationsfusion“ am Institut für Mess- und Regelungstechnik der Universität Karlsruhe (TH) (Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. C. Stiller). Hauptarbeitsgebiete: Signalverarbeitung, automatische Sichtprüfung und Mustererkennung, Datenübertragung und Sensorfusion.

Adresse: Universität Karlsruhe (TH), Institut für Mess- und Regelungstechnik, Engler-Bunte-Ring 21, D-76131 Karlsruhe, Tel.: (0721) 608-2341, Fax: (0721) 66 18 74. E-Mail: fernando@epost.de