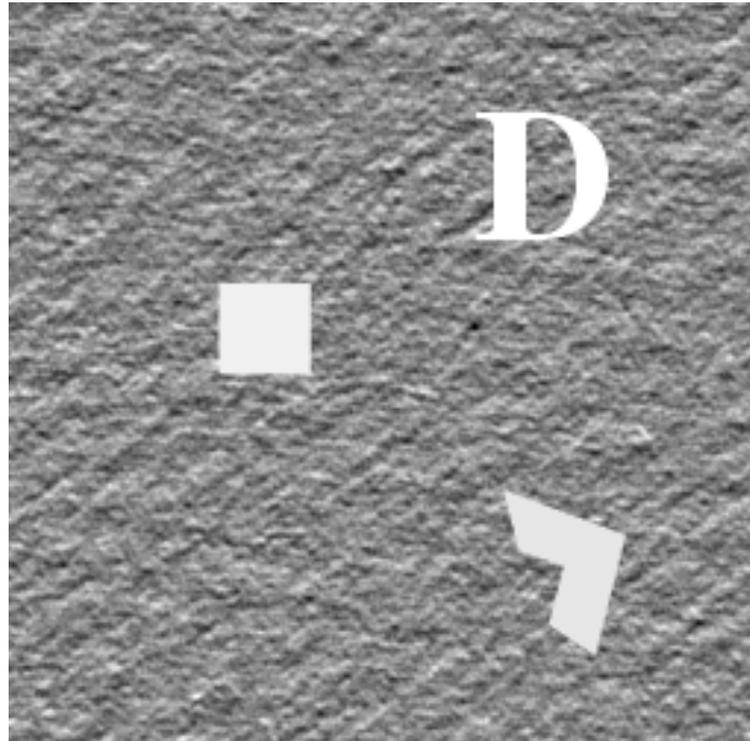


14. Detektion

Ziel: Detektion von Objekten oder Defekten und Feststellung ihrer Lage

- Einfaches Modell: Objekte $o_i(\mathbf{x})$ sind einem Hintergrund $h(\mathbf{x})$ überlagert

$$g(\mathbf{x}) = \sum_i c_i \cdot o_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + h(\mathbf{x})$$



- Lineares Detektionsfilter (Impulsantwort $v(\mathbf{x})$):

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})$$

$k(\mathbf{x})$ soll an den Orten \mathbf{x}_i Extremwerte zeigen

- Wichtige Fälle:

	Objekte $o_i(\mathbf{x})$ bekannt	Objekte unbekannt (z. B. Defektdetektion)
Hintergrund schwach stationärer stochastischer Prozess $h(\mathbf{x})$ mit bekannter AKF $r_{hh}(\tau)$	<i>Matched Filter</i> : Detektionsfilter mit optimalem SNR	Suche nach signifikanten lokalen Abweichungen von den Hintergrund-eigenschaften → z. B. Prädiktionsfehlerfilter
Hintergrund unbekannt	– Korrelationsfilter – <i>Phase Only Filter</i> – inverses Filter – ...	Detektion lokaler Texturinhomogenitäten → Homogenitätstests

14.1.1 Unbekannter Hintergrund

- Objekt $o(\mathbf{x})$ bekannt (deterministisch), Hintergrund $h(\mathbf{x})$ unbekannt:

$$g(\mathbf{x}) = c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x}) ** c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x})$$

$$\uparrow$$

$$G(\mathbf{f}) = O(\mathbf{f}) c e^{-j2\pi\mathbf{f}^T \mathbf{x}_0} + H(\mathbf{f})$$

- Idee: KKF von $o(\mathbf{x})$ und $o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$: $\iint o(\mathbf{x}) o(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$ wird maximal bei $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_0 \rightarrow g(\mathbf{x}) ** o(-\mathbf{x})$: Maximum bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

→ **Korrelationsfilter**

$$v(\mathbf{x}) = o(-\mathbf{x}) \quad \circ \bullet \quad V(\mathbf{f}) = O^*(\mathbf{f})$$

- Verallgemeinerung:**

$$O(\mathbf{f}) = |O(\mathbf{f})| \cdot e^{j\angle O(\mathbf{f})}$$

$$V_q(\mathbf{f}) := |O(\mathbf{f})|^q \cdot e^{-j\angle O(\mathbf{f})} \quad q \in [-1, 1]$$

Verallgemeinerung heißt
Fractional Power Filter
 (FPF)

Spezialfälle:

$$q = -1 : V(\mathbf{f}) = O^{-1}(\mathbf{f})$$

Inverses Filter zur Rekonstruktion von $c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rightarrow$ sehr schmaler Detektionspeak

Nullstellen von $O(\mathbf{f})$

\rightarrow extreme Rauschverstärkung

besser:
$$V(\mathbf{f}) = \frac{O^*(\mathbf{f})}{|O(\mathbf{f})|^2 + \varepsilon}$$

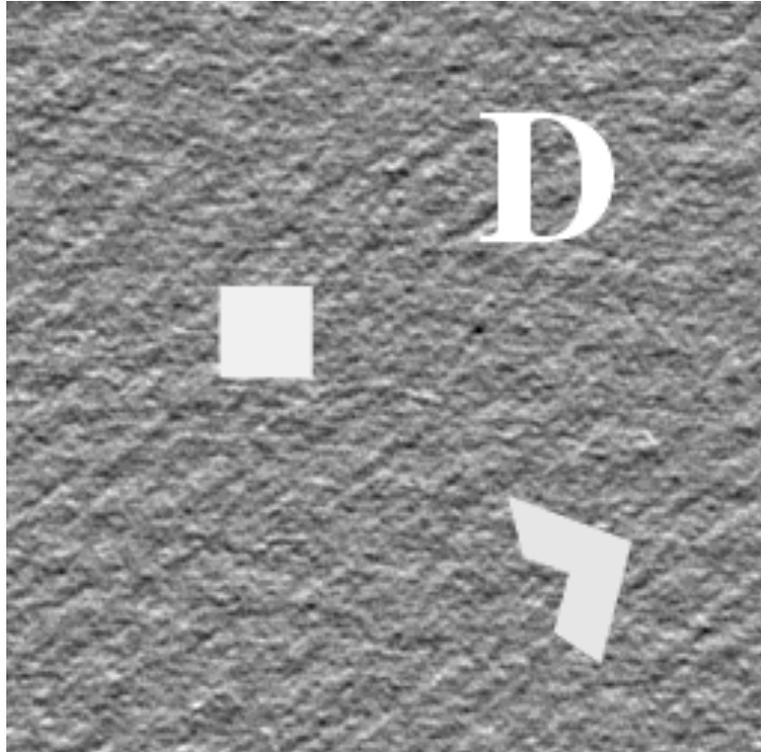
$$q = 0 : V(\mathbf{f}) = e^{-j\angle O(\mathbf{f})}$$

POF (Phase Only Filter) interessant für optische Realisierung, da kein Lichtverlust

$$q = 1 : \text{Korrelationsfilter}$$

Optimalfilter (Matched-Filter), falls $h(\mathbf{x}) =$ weißes Rauschen

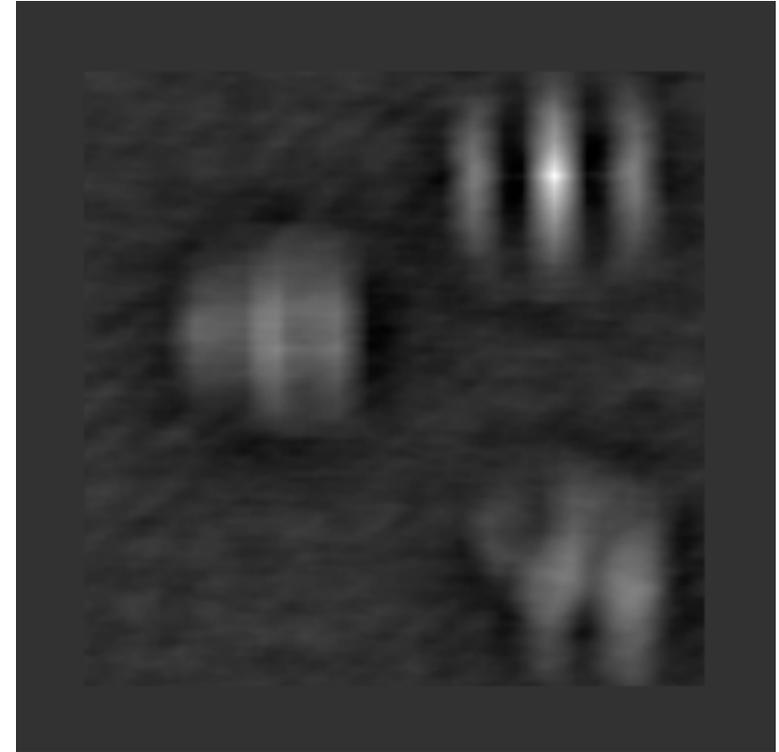
Beispiel 14.1: Objektdetektion mittels Korrelationsfilter



Eingangsbild $g(\mathbf{x})$



Impulsantwort
 $v(\mathbf{x}) = o(-\mathbf{x})$



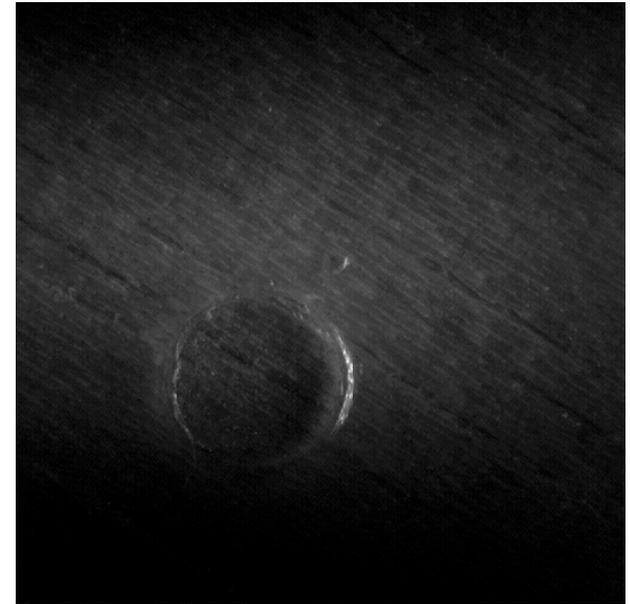
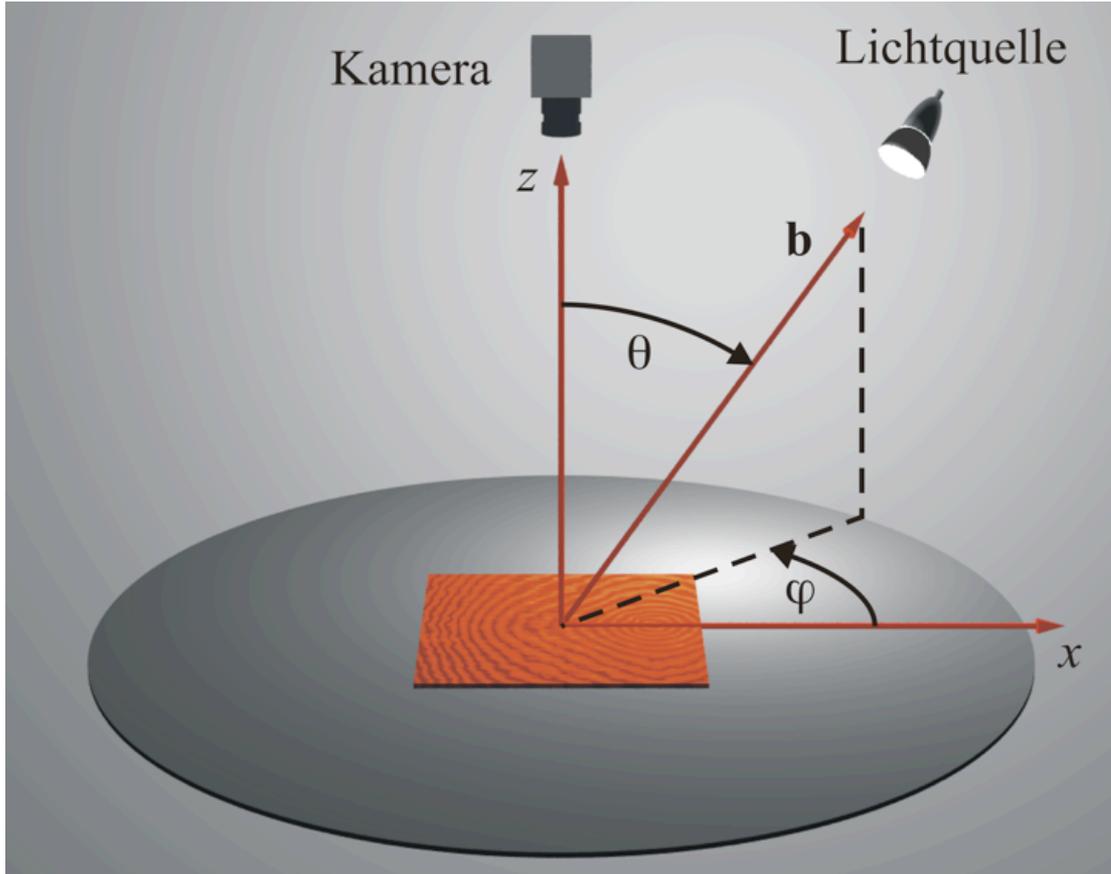
Korrelationsergebnis $k(\mathbf{x})$

- Korrelationsansätze sind empfindlich gegen Rotation, Skalierung und Verzerrung der gesuchten, bekannten Objekte

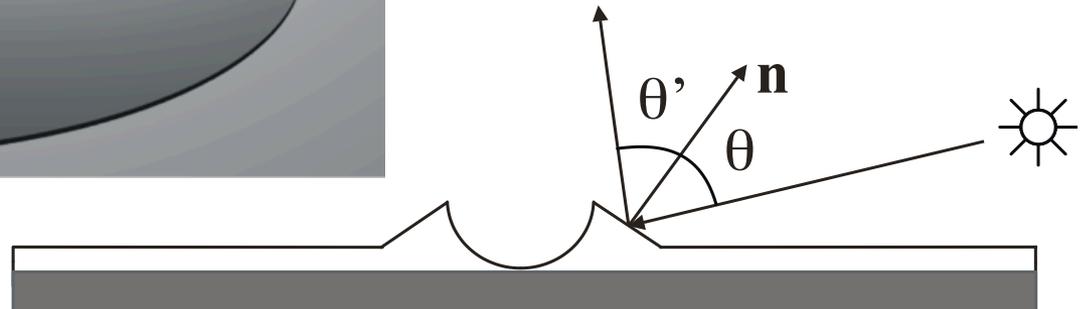
14.1.1 Unbekannter Hintergrund

Beispiel: Korrelationsfilter für Bildserien

■ Kraterdetektion auf Holzoberflächen



 Kamera



14.1.1 Unbekannter Hintergrund



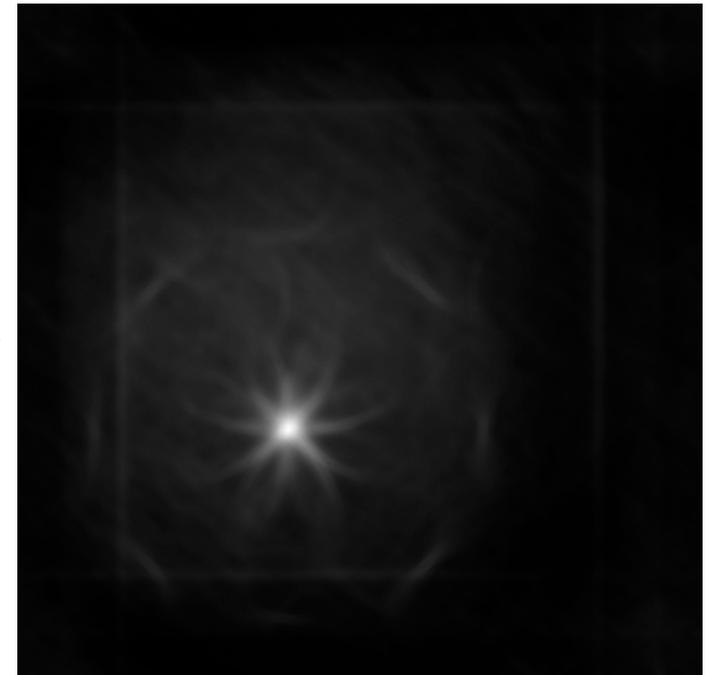
Eingangsbildserie
 $g(\mathbf{x}, \varphi)$

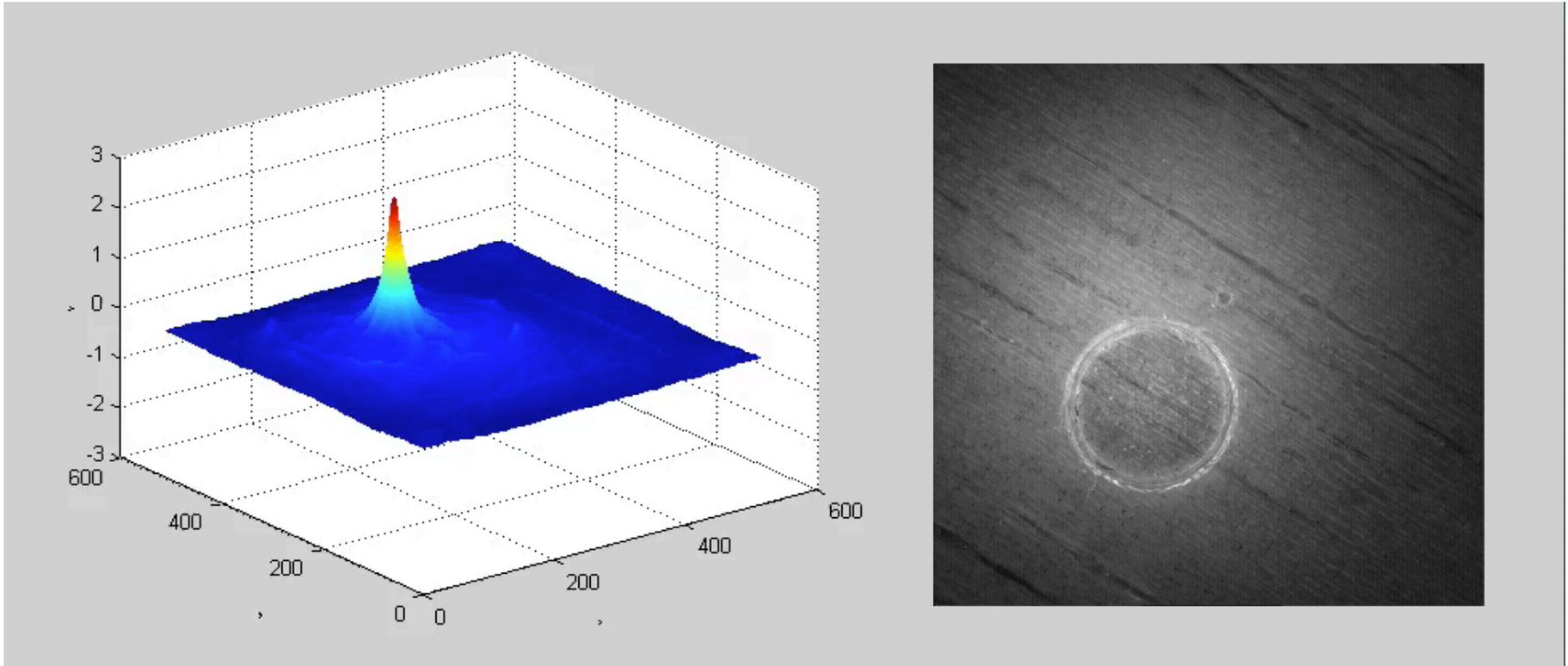


$$v_R(-\mathbf{x}, \varphi) = o_R(\mathbf{x}, \varphi)$$



Korrelationsergebnis $k_R(\mathbf{x})$





Ergebnis der Korrelationsfilterung

Detektionsergebnisse

14.1.2 Weißes Rauschen als Hintergrund

- Annahme: Hintergrund $h(\mathbf{x}) =$ weißes Rauschen, $S_{hh}(\mathbf{f}) \equiv N_h$

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x}) = \underbrace{c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** v(\mathbf{x})}_{\text{Nutzsignal}} + \underbrace{h(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})}_{\text{Störsignal}}$$

$$\text{SNR} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Störsignalleistung}}$$

- Nutzsignal:

$$P_1 := |c o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** v(\mathbf{x})|^2 \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = c^2 |o(\mathbf{x}) ** v(\mathbf{x})|^2 \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$
$$= c^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} O(\mathbf{f}) V(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \right|^2$$

lokale Nutzsignal-
leistung am Ort \mathbf{x}_0

- Störsignal:

$$P_2 = N_h \iint_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}$$

mittlere
Störsignalleistung

14.1.2 Weißes Rauschen als Hintergrund

- **Ziel:** SNR am Ort \mathbf{x}_0 maximieren
- Es gilt:

$$\left| \iint_{-\infty}^{\infty} O(\mathbf{f}) V(\mathbf{f}) d\mathbf{f} \right|^2 \leq \iint_{-\infty}^{\infty} |O(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}$$

Schwarz'sche
Ungleichung

- Linke Seite maximal (d. h. Ungleichung \rightarrow Gleichung), falls $V(\mathbf{f}) \propto O^*(\mathbf{f})$
- Bei festem P_2 wird SNR maximal für

$$V(\mathbf{f}) = \text{const.} \cdot O^*(\mathbf{f})$$

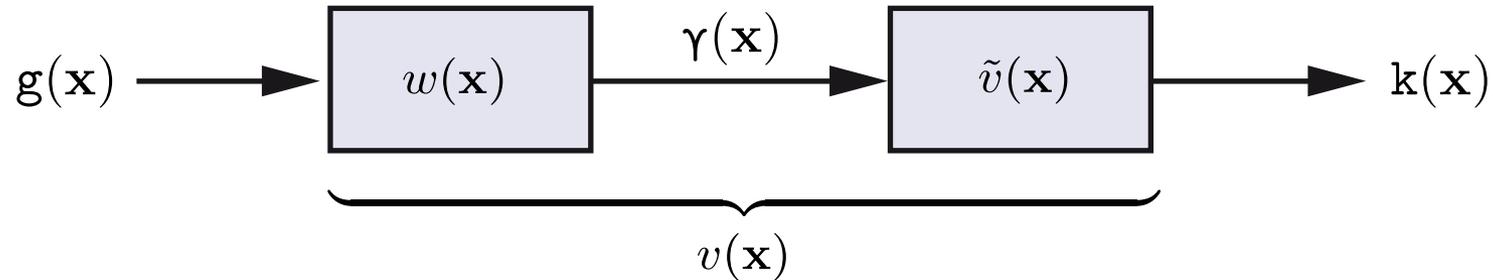


$$v(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot o(-\mathbf{x}) \quad \rightarrow \text{Korrelationsfilter}$$

Matched-Filter

Optimalfilter im Sinne maximalen SNRs an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$

- **Verallgemeinerung:** $h(\mathbf{x}) =$ korreliertes, schwach stationäres Rauschen



$$\gamma(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x}) = c \underbrace{o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ** w(\mathbf{x})}_{=: \tilde{o}(\mathbf{x})} + \underbrace{h(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})}_{=: \rho(\mathbf{x})}$$

- **Ansatz:** $\rho(\mathbf{x})$ soll weißes Rauschen sein

$$S_{\rho\rho}(\mathbf{f}) = |W(\mathbf{f})|^2 S_{hh}(\mathbf{f}) \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$$\Rightarrow |W(\mathbf{f})| = \frac{1}{\sqrt{S_{hh}(\mathbf{f})}}$$

„Whitening“-Filter

→ Problem auf den Fall weißes Rauschens zurückgeführt

- Durch das *Whitening* entsteht das modifizierte Nutzsignal $\tilde{o}(\mathbf{x})$ mit überlagertem weißem Rauschen, das nun mit einem Matched-Filter detektiert werden kann:

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot \tilde{o}(-\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{o}(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})$$

- Somit resultiert für das Detektionsfilter insgesamt:

$$v(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot \tilde{o}(-\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x}) = \text{const.} \cdot o(-\mathbf{x}) ** w(-\mathbf{x}) ** w(\mathbf{x})$$



$$V(\mathbf{f}) = \text{const.} \cdot O^*(\mathbf{f}) |W(\mathbf{f})|^2 = \text{const.} \cdot \frac{O^*(\mathbf{f})}{S_{hh}(\mathbf{f})}$$

Filter öffnet für spektrale Komponenten von $o(\mathbf{x})$ und schließt für starke spektrale Komponenten von $h(\mathbf{x})$

„Matched-Filter für farbiges Rauschen“

Beispiel 14.2: Zeichenerkennung



(a)



„0“



„1“

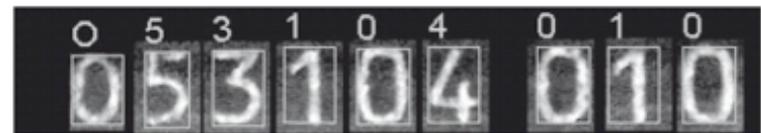


„2“



(b)

(c)



(d)

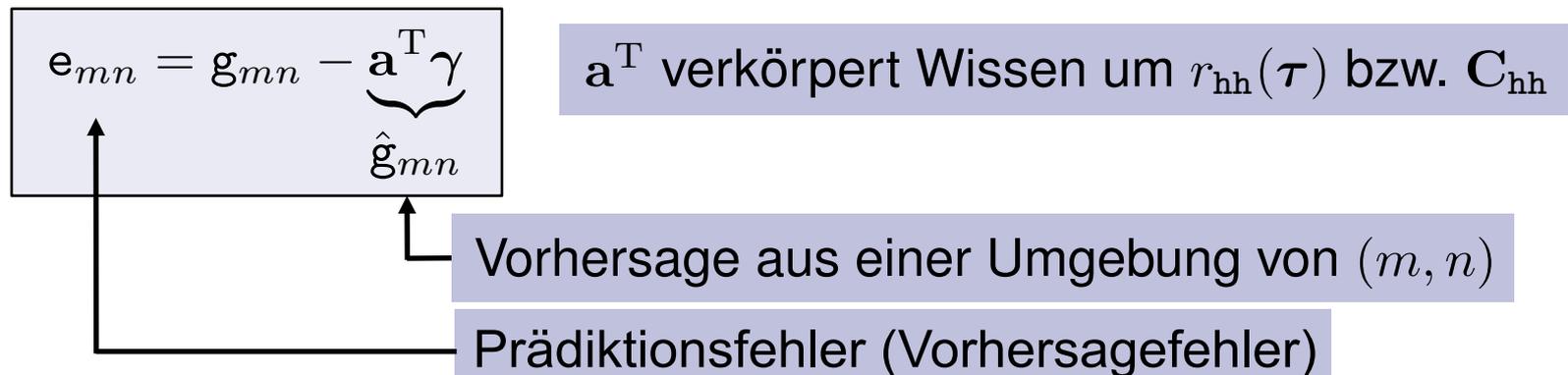
14.2 Detektion unbekannter Objekte (Defekte)

- $o(\mathbf{x})$: stochastischer Prozess, Eigenschaften unbekannt
- $h(\mathbf{x})$: schwach stationärer stochastischer Prozess; AKF $r_{hh}(\tau)$ bekannt
- Typische Situation für Defektdetektion in bekannten Texturen

Vorgehensweise:

- Suche nach signifikanten lokalen Abweichungen von den statistischen Eigenschaften von $g(\mathbf{x})$ durch selektive Unterdrückung von $h(\mathbf{x})$
→ Hervorhebung der Defekte

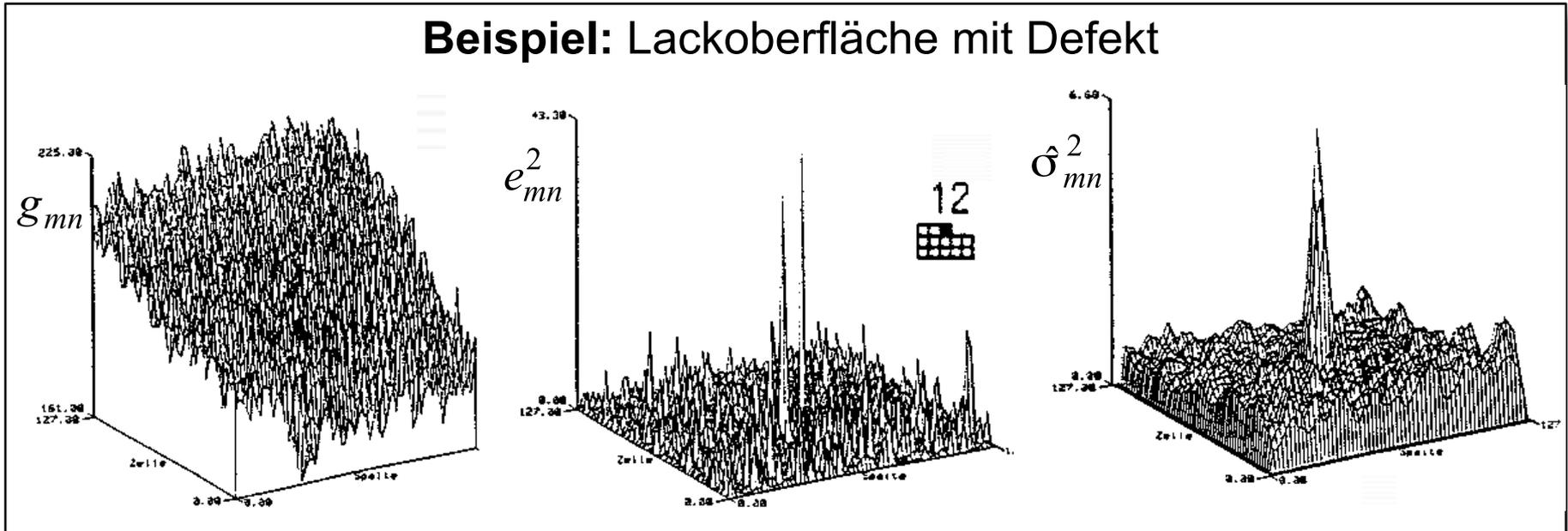
Beispiel 14.3: Prädiktionsfehlerfilter auf Basis eines AR-Modells



14.2 Detektion unbekannter Objekte (Defekte)

- An lokalen Abweichungen des Bildsignals g_{mn} vom modellierten Hintergrund h_{mn} hat der Prädiktionsfehler e_{mn} eine hohe lokale Leistung
→ $\sigma_{mn}^2 = \text{Var}\{e_{mn}\}$ hat lokale Maxima bei Defekten
- Schätzung durch Tiefpassfilterung des Prädiktionsfehlerquadrats

Beispiel: Lackoberfläche mit Defekt



14.2 Detektion unbekannter Objekte (Defekte)

Beispiel 14.3: Prädiktionsfehlerfilter, Fehlerdetektion in einer Holztextur

Original-
aufnahme

g_{mn}



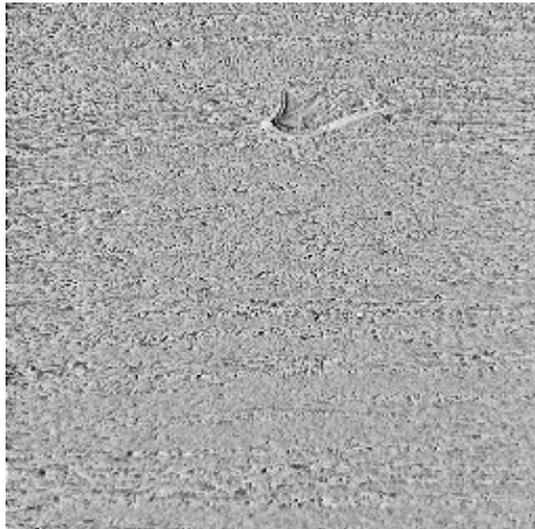
Prädiktion

\hat{g}_{mn}



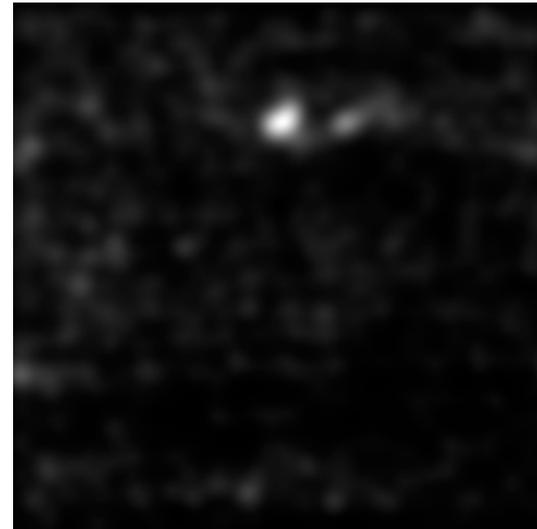
Prädiktions-
fehler

e_{mn}



Schätzung
der lokalen
Varianz

von e_{mn}
($\text{TP}\{e_{mn}^2\}$)



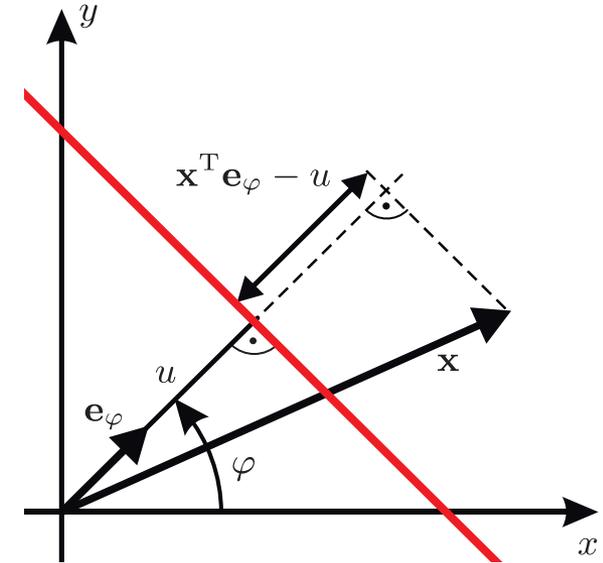
14.3 Geradendetektion

- Geraden sind wichtige Bestandteile zahlreicher Bilder
- **Ziel:** Detektion und Lagebestimmung

14.3.1 Die Radon-Transformation

■ Definition:

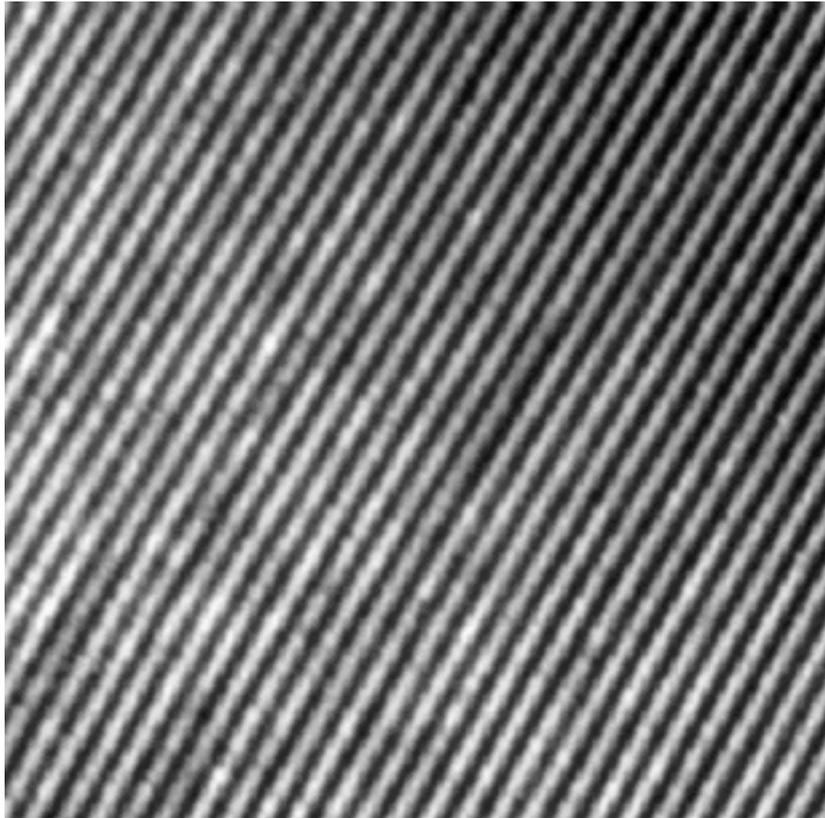
$$\check{g}(u, \varphi) = \mathcal{R}\{g(\mathbf{x})\} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \underbrace{\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi - u)}_{\delta\text{-Gerade}} d\mathbf{x}$$



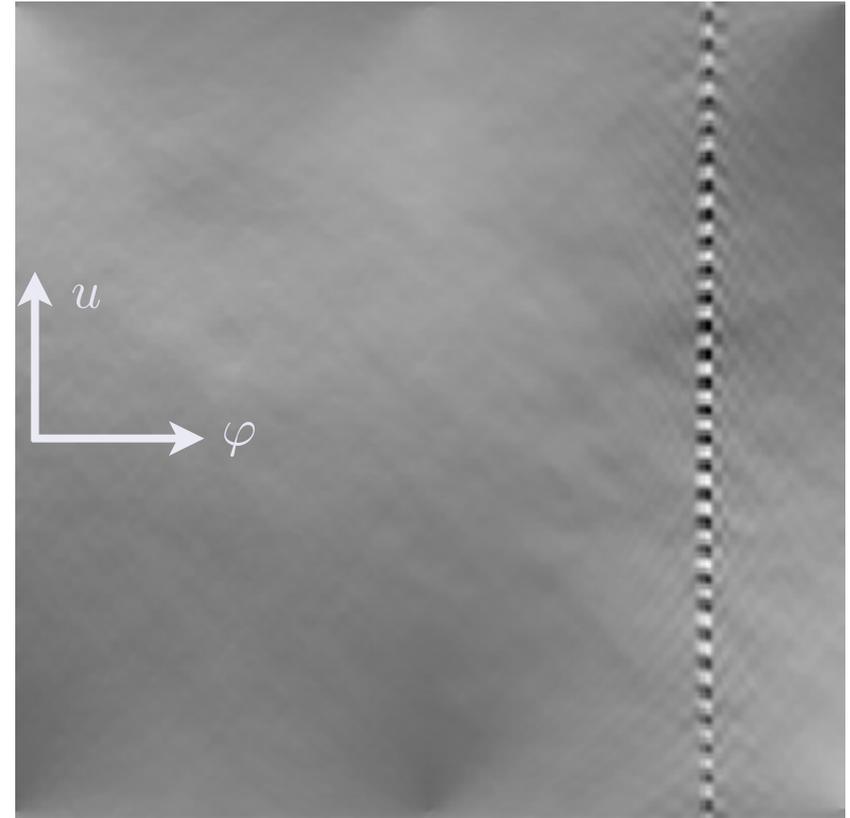
u : Ursprungsabstand
 \mathbf{e}_φ : Normalenvektor

- Die Radon-Transformation entwickelt $g(\mathbf{x})$ nach δ -Geraden
- Für $\varphi = \varphi_0$ fest, u variabel ist \check{g} Parallelprojektion von $g(\mathbf{x})$ senkrecht zu \mathbf{e}_φ
- Enthält $g(\mathbf{x})$ eine δ -Gerade $\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_\alpha - d)$, so zeigt $\check{g}(u, \varphi)$ ein ausgeprägtes Maximum bei $\varphi = \alpha, u = d$

Beispiel 14.4: Radon-Transformation einer Riefentextur



Stoßtextur



0°

Radon-Transformierte

180°

Das Zentralschnitt-Theorem

■ $\varphi = 0^\circ \Rightarrow u = x :$

$$\begin{aligned}\check{g}(x, 0) &= \int g(x, y) dy = \iint g(\mu, \nu) \delta(x - \mu) d\mu d\nu \\ &= g(\mathbf{x}) ** \delta(x) 1(y) = g(\mathbf{x}) ** \delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_x)\end{aligned}$$



$$G(\mathbf{f}) \cdot \delta(f_y) = G(\mathbf{f}) \cdot \delta(\mathbf{f}^T \mathbf{e}_y)$$

Entnahme der Spektralwerte auf einer Ursprungsgeraden senkrecht zur Projektionsrichtung

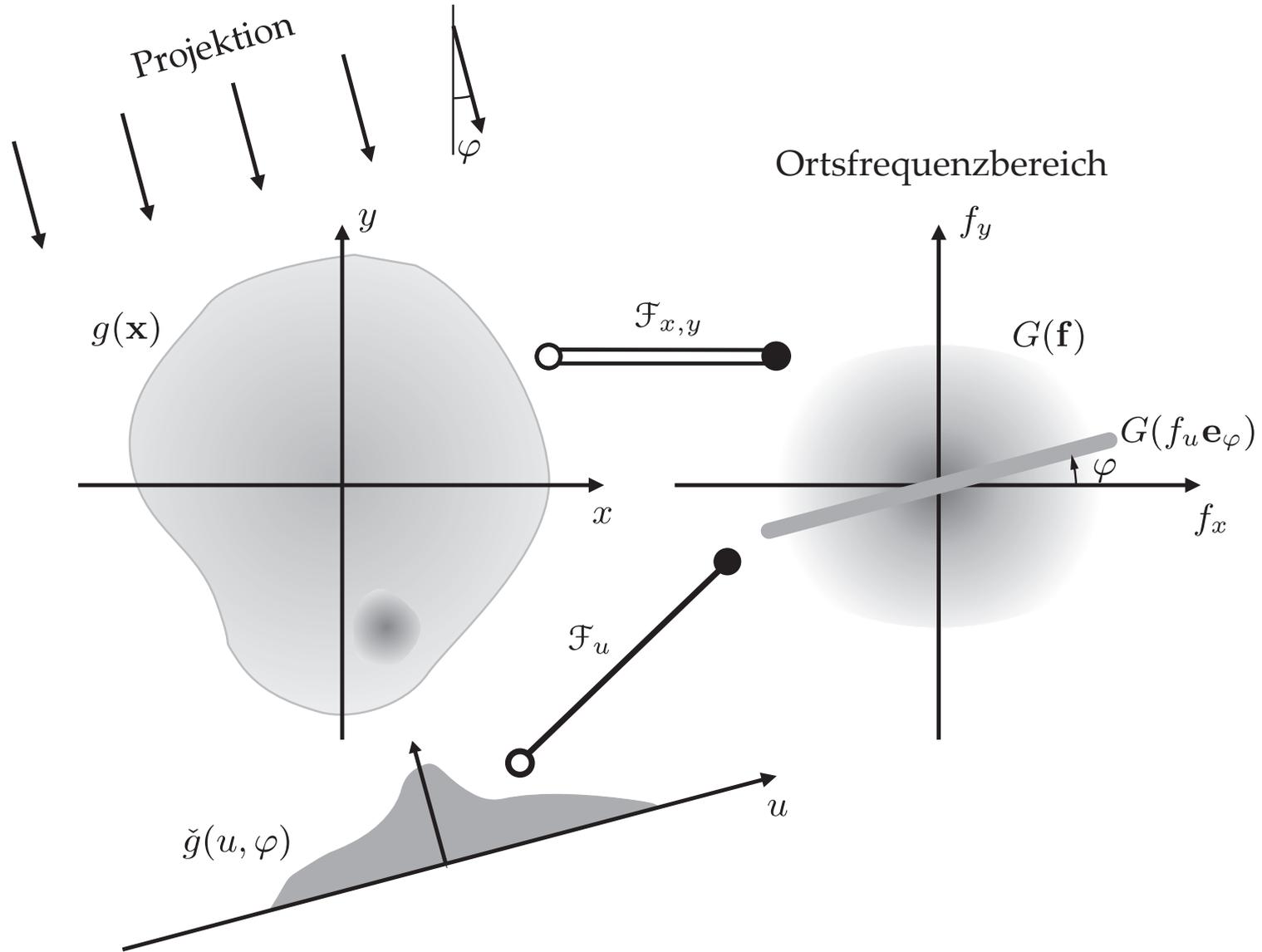
■ Drehung um $\varphi \neq 0$: $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_{\varphi\perp} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$

■ Drehung von $\delta(\mathbf{x}^T \mathbf{e}_x)$ um $\varphi \neq 0$ bewirkt ebensolche von $\delta(\mathbf{f}^T \mathbf{e}_y)$

$$\mathcal{F}_u \{ \check{g}(u, \varphi) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(u, \varphi) e^{-j2\pi f_u u} du = G(f_u \mathbf{e}_\varphi)$$

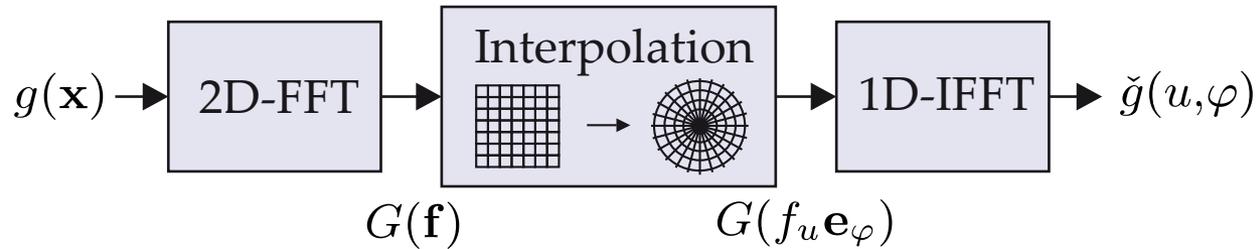
Zentralschnitt-
Theorem

14.3.1 Die Radon-Transformation



Effiziente Berechnung der Radon-Transformation

- 2D-FFT
- Übergang zu Polarkoordinaten f_u, φ (Interpolation notwendig)
- Zeilenweise 1D-DFT⁻¹ (FFT⁻¹) bezüglich f_u

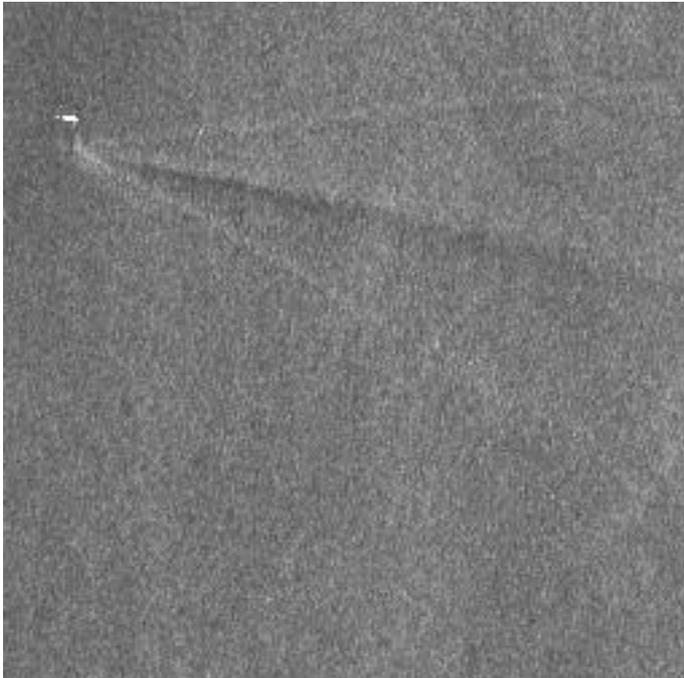
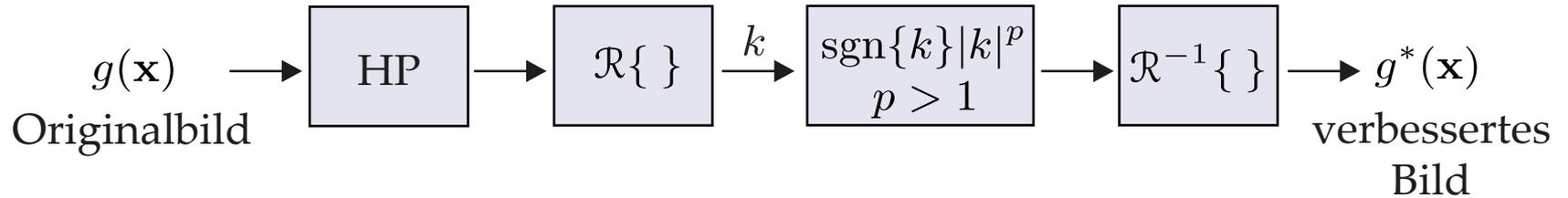


Aufwand

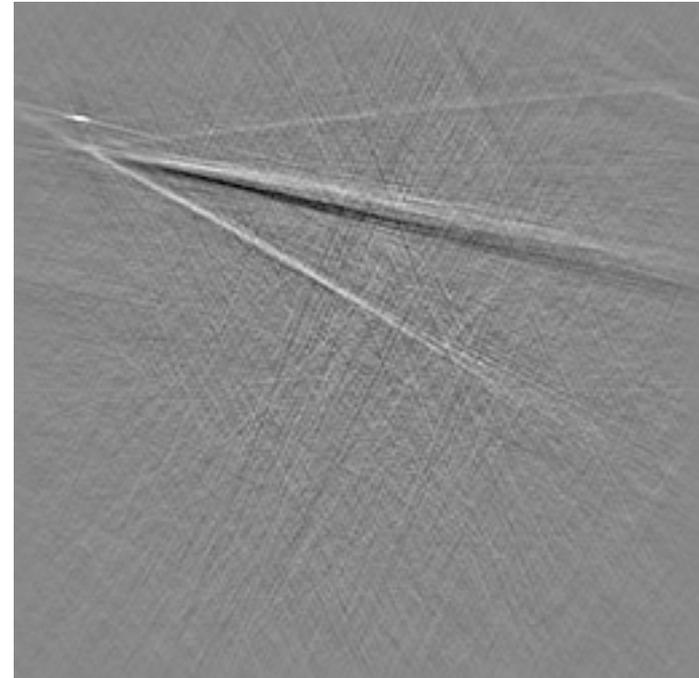
- Radon-Integral direkt: $\mathcal{O}(N^3)$
- Via Zentralschnitt-Theorem: $\mathcal{O}(N^2 \text{ ld } N)$

Bildgröße $N \times N$	256 × 256	512 × 512	1024 × 1024
$\frac{\text{Aufwand}_{\text{Radon}} = \mathcal{O}(N^3)}{\text{Aufwand}_{\text{ZST}} = \mathcal{O}(N^2 \text{ ld } N)}$	≈ 10	≈ 18	≈ 32

Beispiel 14.6: Linienverstärkung zur Bildverbesserung

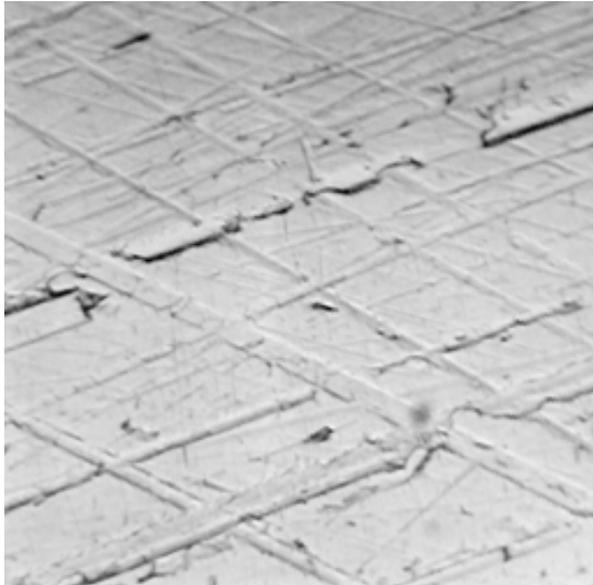


SAR-Bild eines Schiffes mit Bugwelle

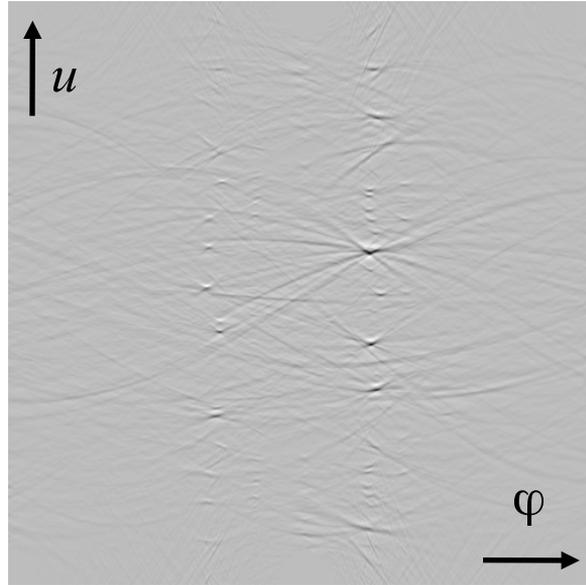


Verbessertes Bild

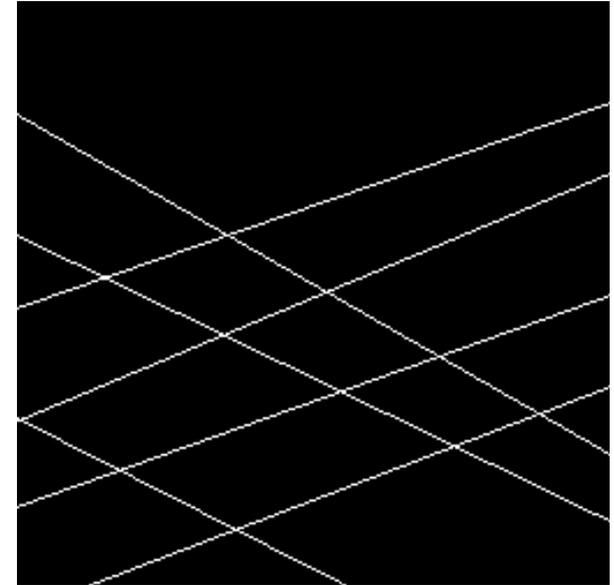
Beispiel 14.7: Detektion von Riefen in Hontexturen



Original



Radon-Transformierte

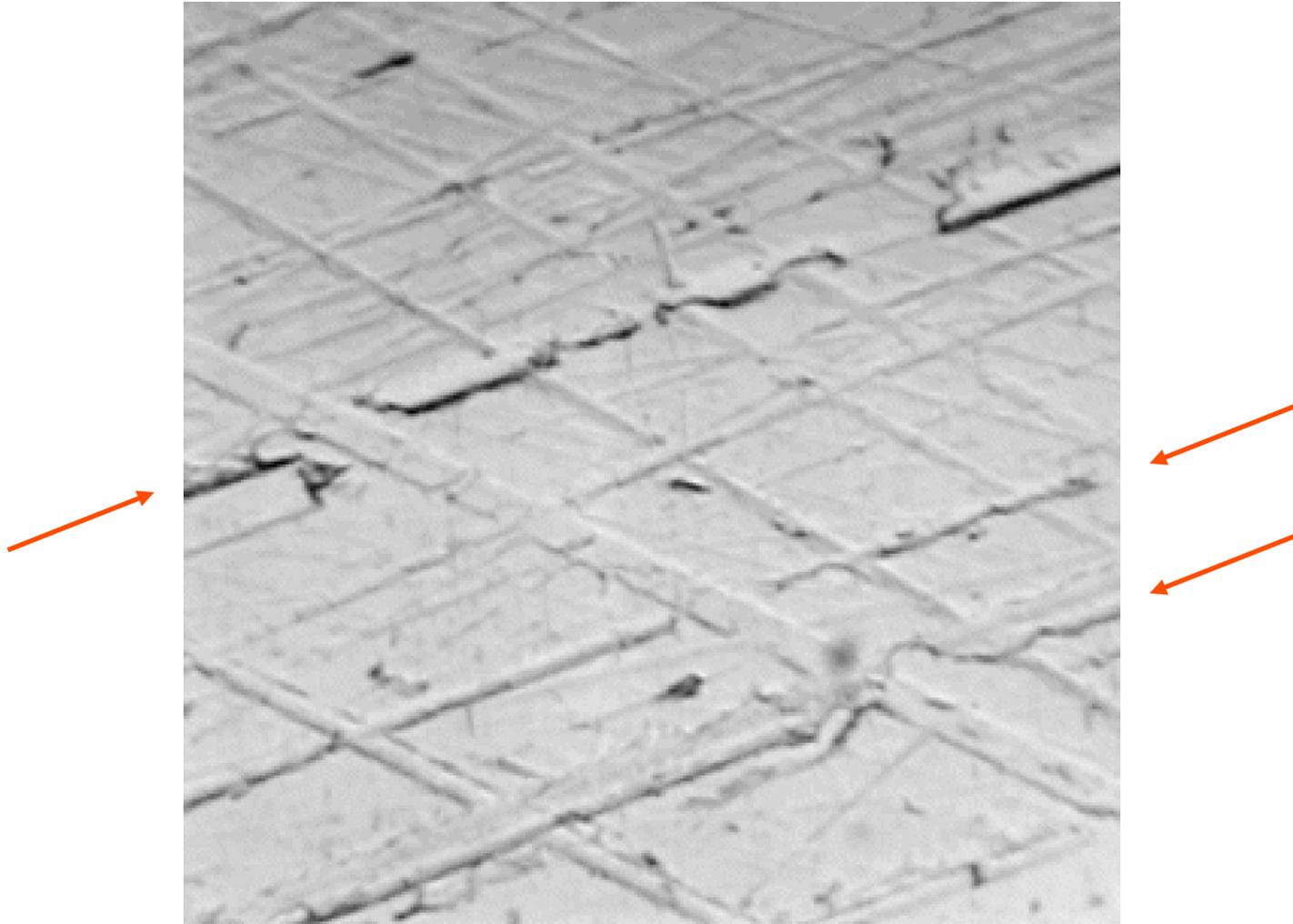


Detektionsergebnis

- **Bemerkung:** Im Gegensatz zu differenzierenden Kanten- und Linien-detektionsoperatoren ist die Radon-Transformation aufgrund ihres integrierenden Charakters rauschunempfindlicher

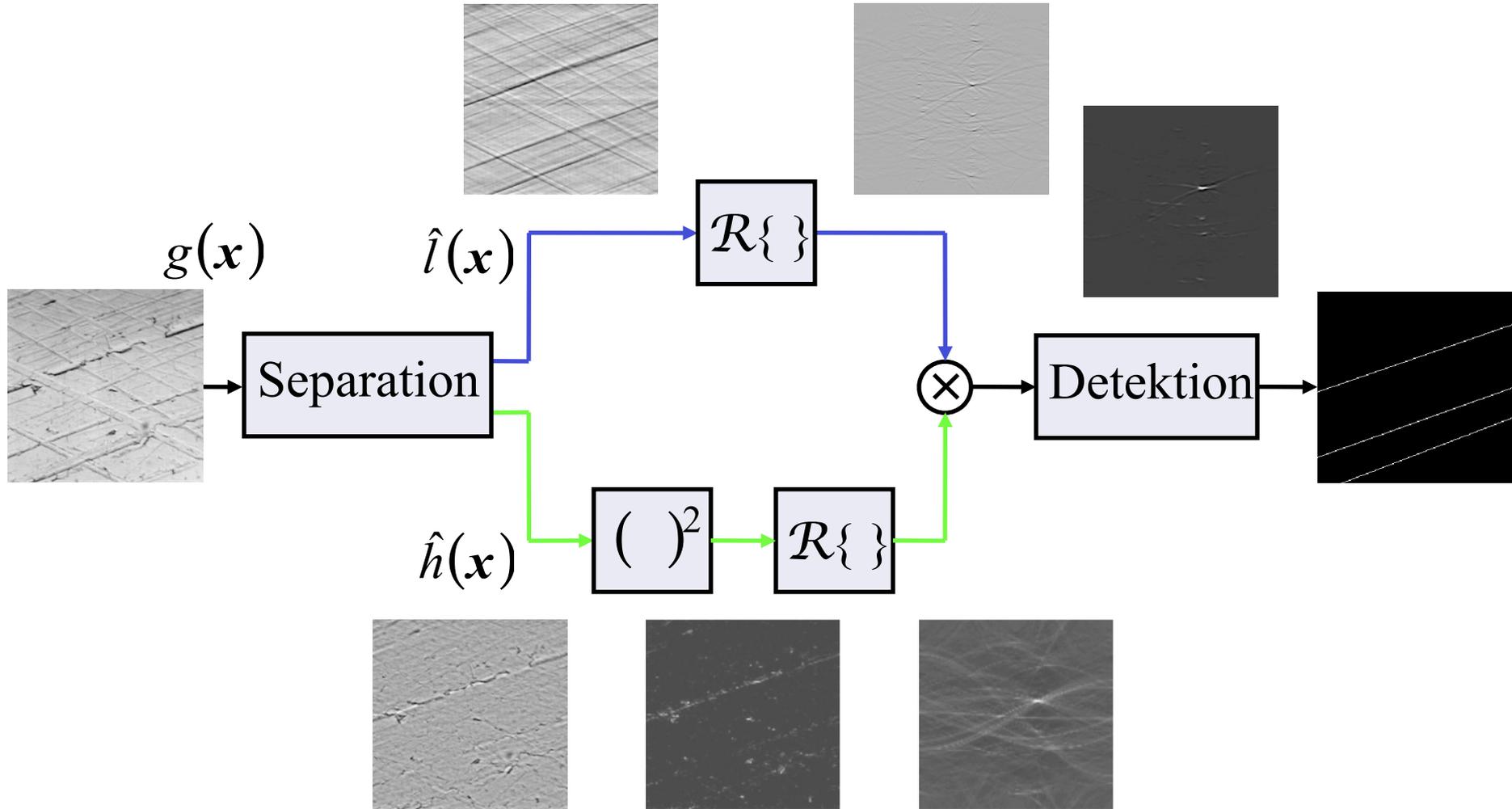
14.3.2 Detektion geradenhafter Strukturen

Beispiel 14.8: Detektion von defekten Riefen in Hontexturen

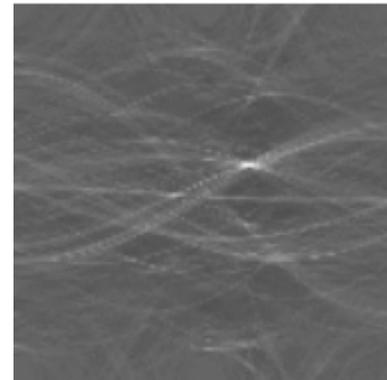
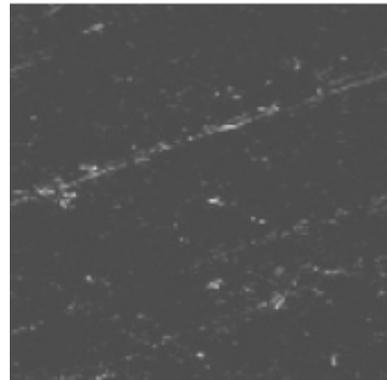
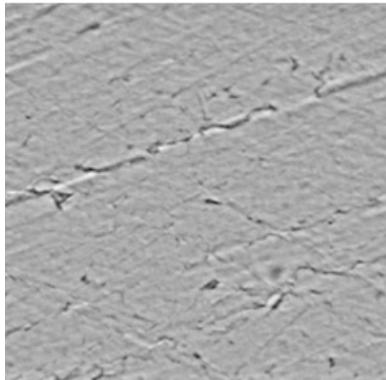
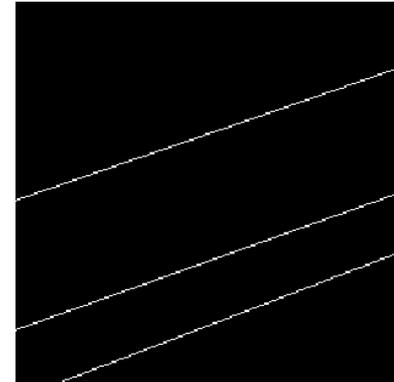
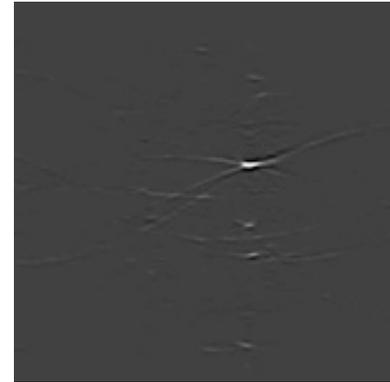
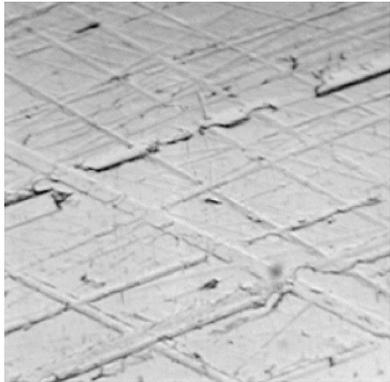
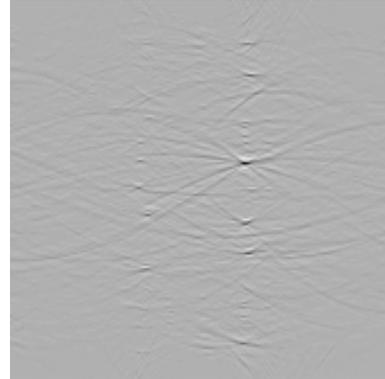
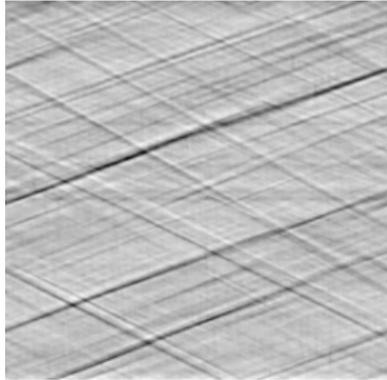


14.3.2 Detektion geradenhafter Strukturen

Detektionsverfahren:



14.3.2 Detektion geradenhafter Strukturen



14.3.3 Die Hough-Transformation

- Patentierte durch P. V. C. Hough 1962
- Verbessert: R. O. Duda, P. E. Hart 1972

■ **Hough-Transformation:** diskrete Form der Radon-Transformation

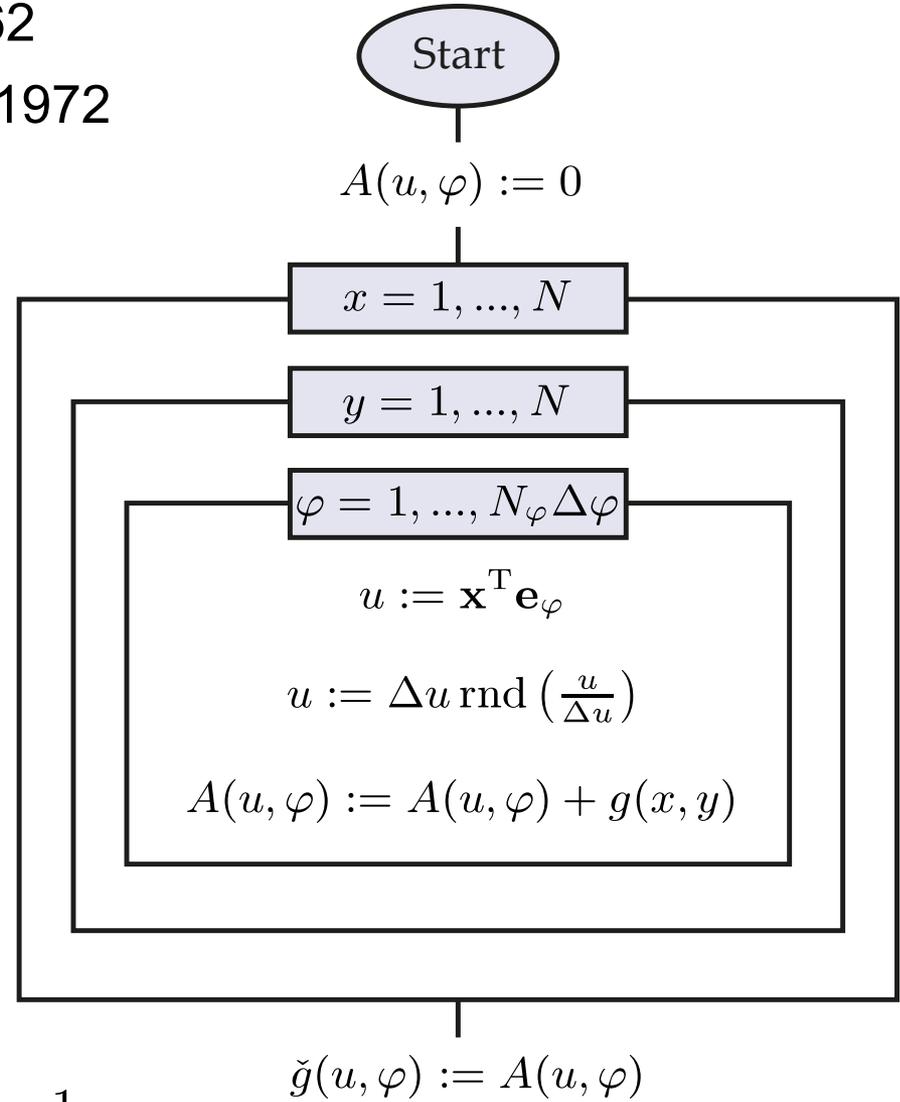
■ Geradengleichung:

$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \mathbf{x}^T \mathbf{e}_\varphi$$

■ Hough-Transformierte:

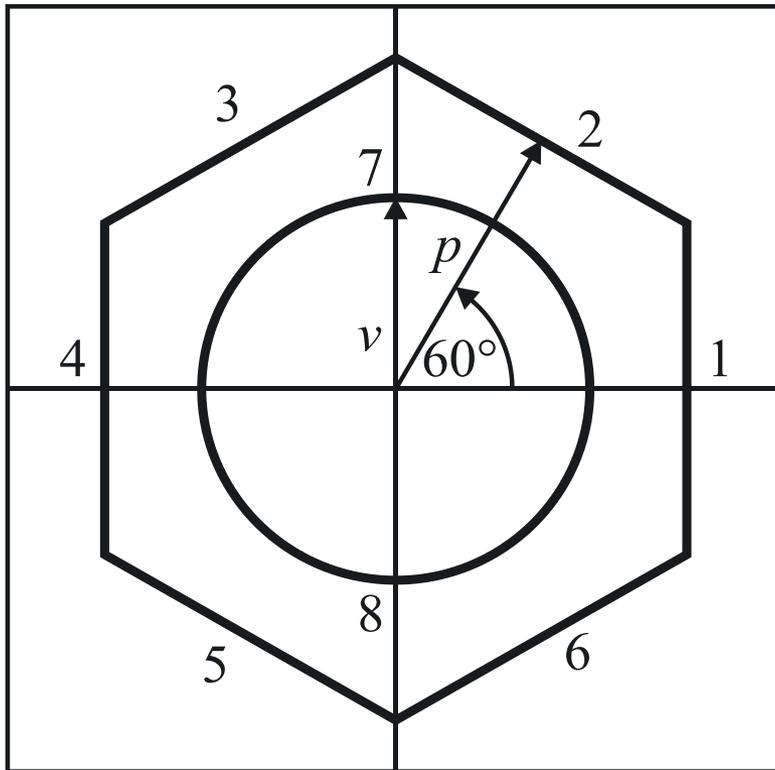
$A(u, \varphi)$: „Akkumulator“

■ Bei Binärbildern $g \in \{0, 1\}$:
Summation nur über Orte mit $g(\mathbf{x}) = 1$

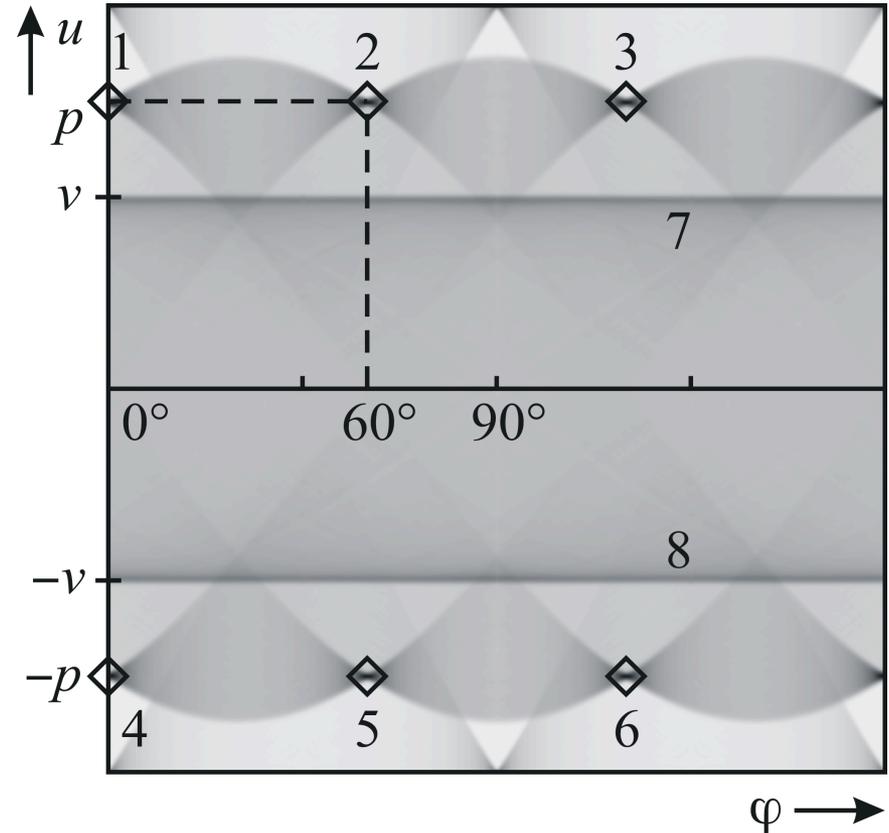


14.3.3 Die Hough-Transformation

Beispiel: Hough-Transformation eines binären Bildes



Binäres Testbild



Hough-Transformierte