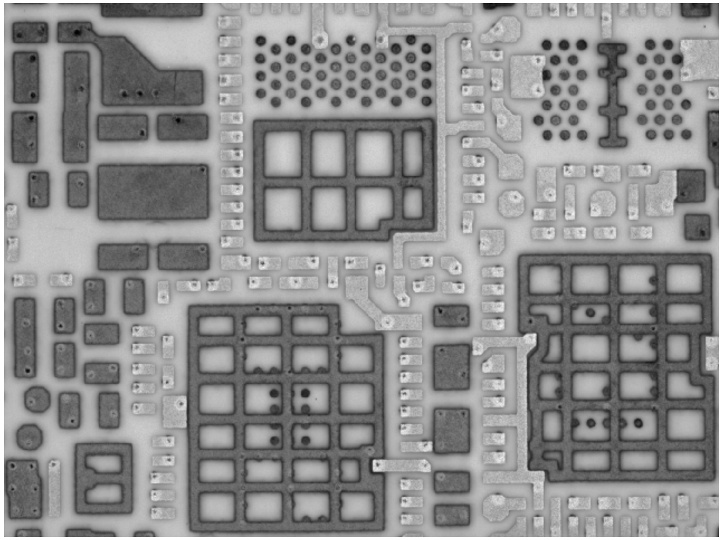
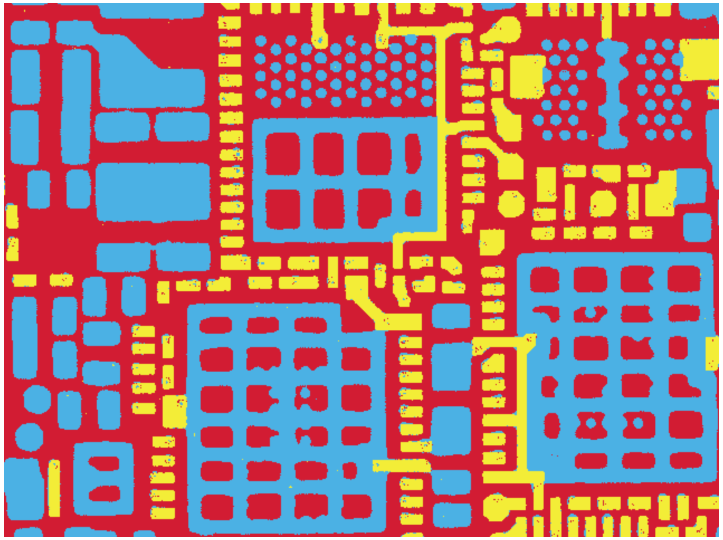




11. Segmentierung

Institut für Industrielle Informationstechnik

Ziel:

- Zerlegung eines Bildes $g(\mathbf{x})$ in getrennte bedeutungsvolle Bereiche

Definition: Vollständige Segmentierung

- Unterteilung der Menge Ω_g aller Bildpunkte von $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_g$, in I disjunkte, nichtleere Teilmengen $\omega_1, \ldots, \omega_I$ so, dass mit einem gewissen Einheitlichkeitskriterium $\mathcal{E}$ gilt:
  - $\bigcup_{i=1}^{I} \omega_i = \Omega_g$
  - $\forall i$: ω_i ist zusammenhängend
  - $\forall i$: $\mathcal{E}(\omega_i)$ ist erfüllt
  - für jede Vereinigungsmenge benachbarter ω_i, ω_j ist $\mathcal{E}(\omega_i \cup \omega_j)$ nicht erfüllt

- Man unterscheidet zwischen **bereichsorientierten** und **kantenorientierten** Verfahren

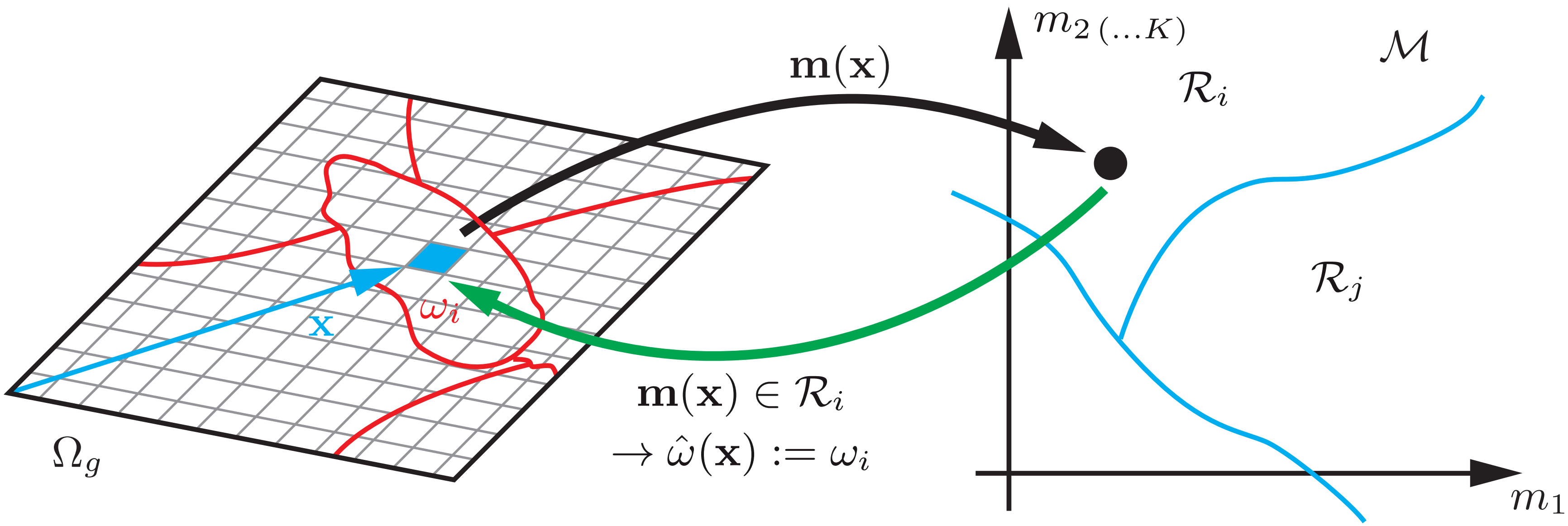
Institut für Industrielle Informationstechnik

11.1.1 Segmentierung durch merkmalsbasierte Klassifikation

- Jedem Pixel $\mathbf{x}$ wird ein Merkmalsvektor $\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^K$ zugeordnet
- Merkmalsraum $\mathcal{M}$ wird (z. B. mittels Ballungsanalyse) in I disjunkte Entscheidungsgebiete $\mathcal{R}_i$ partitioniert:

$$\bigcup_{i=1}^{I} \mathcal{R}_i = \mathcal{M}\,, \qquad \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \varnothing \quad \text{für} \quad i \neq j$$

- **Segmentierung**: $\boxed{\mathbf{m}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} \text{ wird } \omega_i \text{ zugewiesen}}$

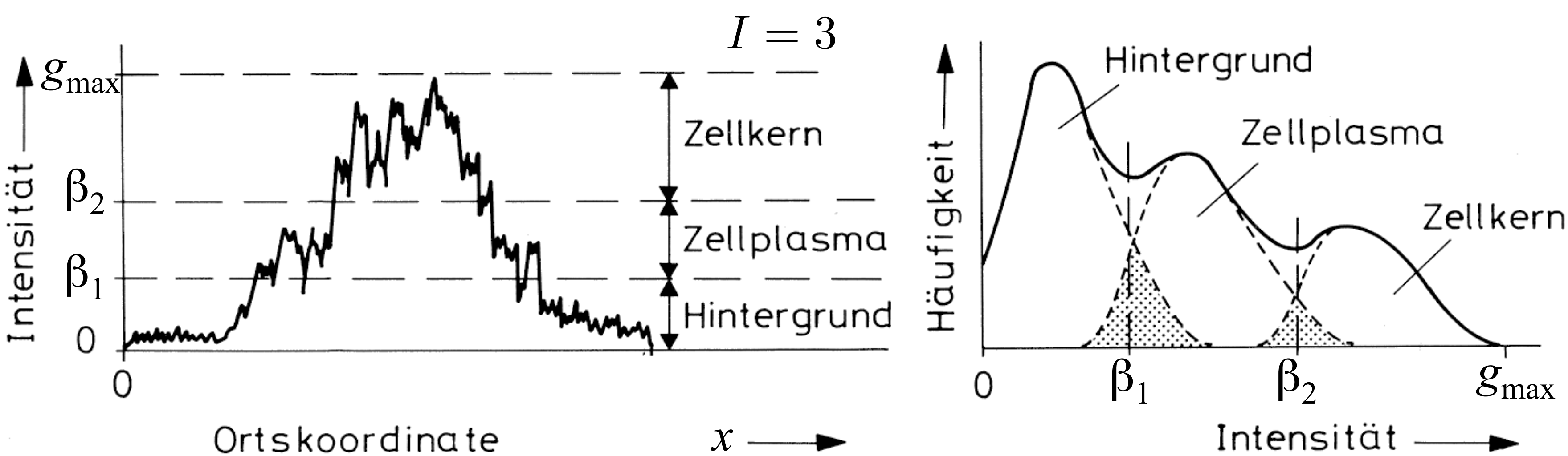


Beispiel 11.1: Bildwert als Merkmal

- Einfachster Merkmalsraum: Bildwert als Merkmal verwendet:

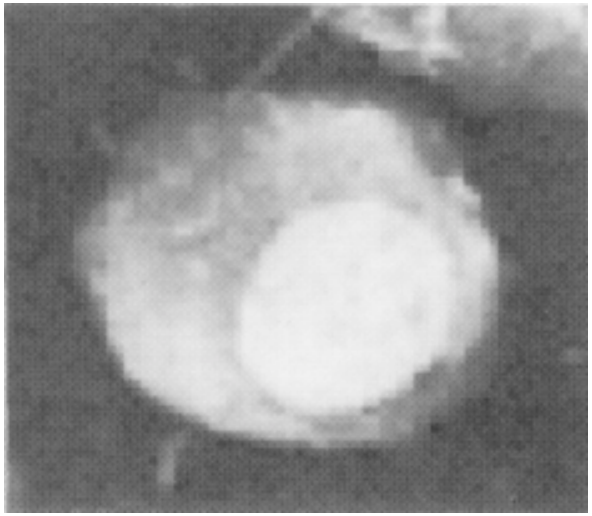
$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \,, \quad K = 1$$

- Segmentierung erfolgt durch Festlegung von Entscheidungsgebieten (z. B. Intervalle von Grauwerten) und deren Grenzen
- Die so erzeugten Segmente ω_i müssen nicht zusammenhängen!

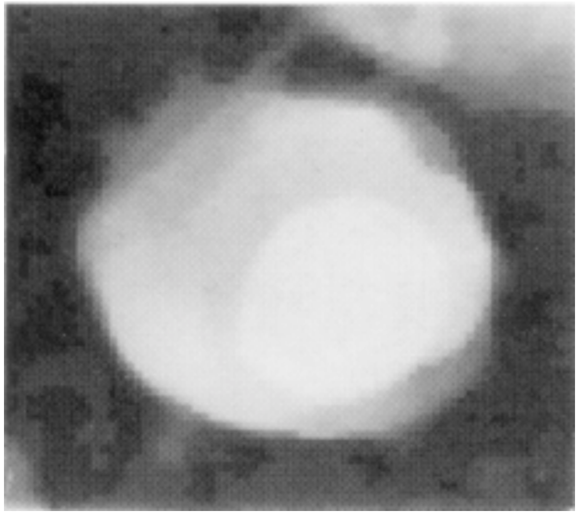


Quelle: F. M. Wahl, Digitale Bildsignalverarbeitung, 1989

Quelle: Wahl, 1989



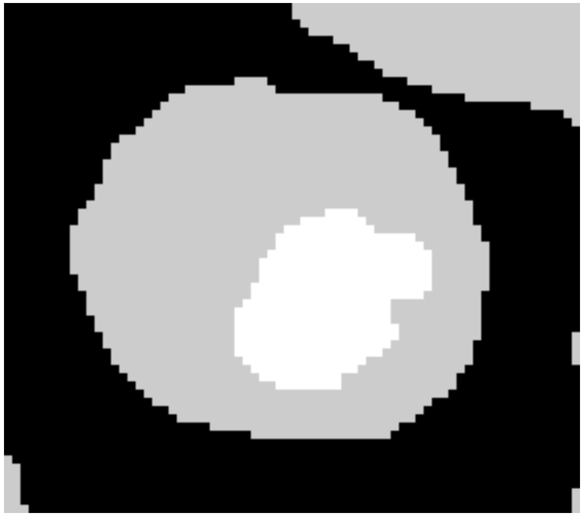
Zellbild (Original)



Medianfilterung

Schwellen zu niedrig

Segmentierungsergebnis

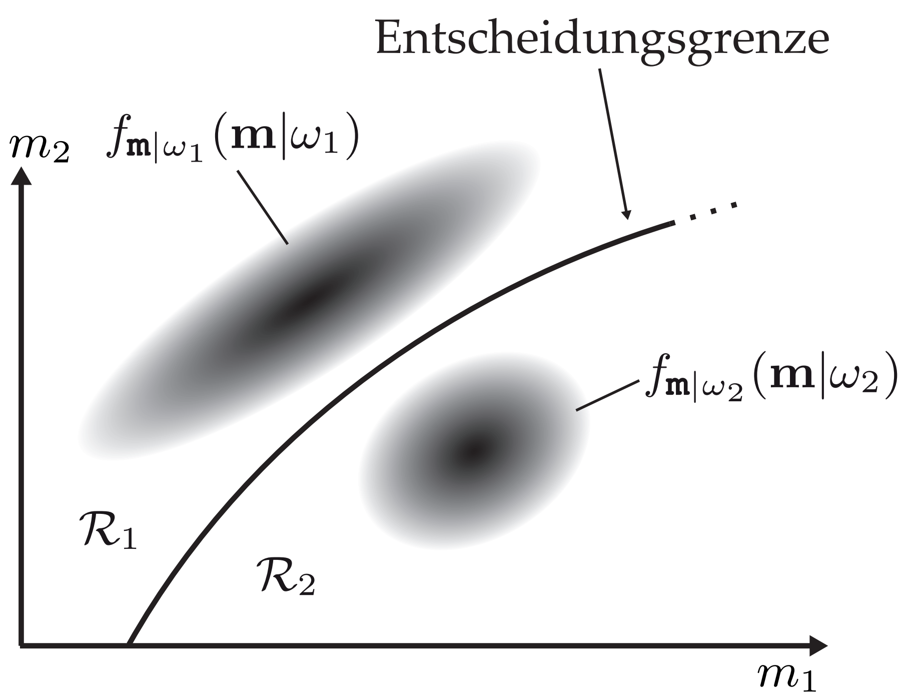


Schwellen zu hoch

Beispiel 11.3: Lokaler Mittelwert und Standardabweichung

- Statistiken über die lokale Bildwertverteilung als Merkmale geeignet, z. B.:

$$K = 2, \quad \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\mu}(\mathbf{x}) \\ \hat{\sigma}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad I = 2$$

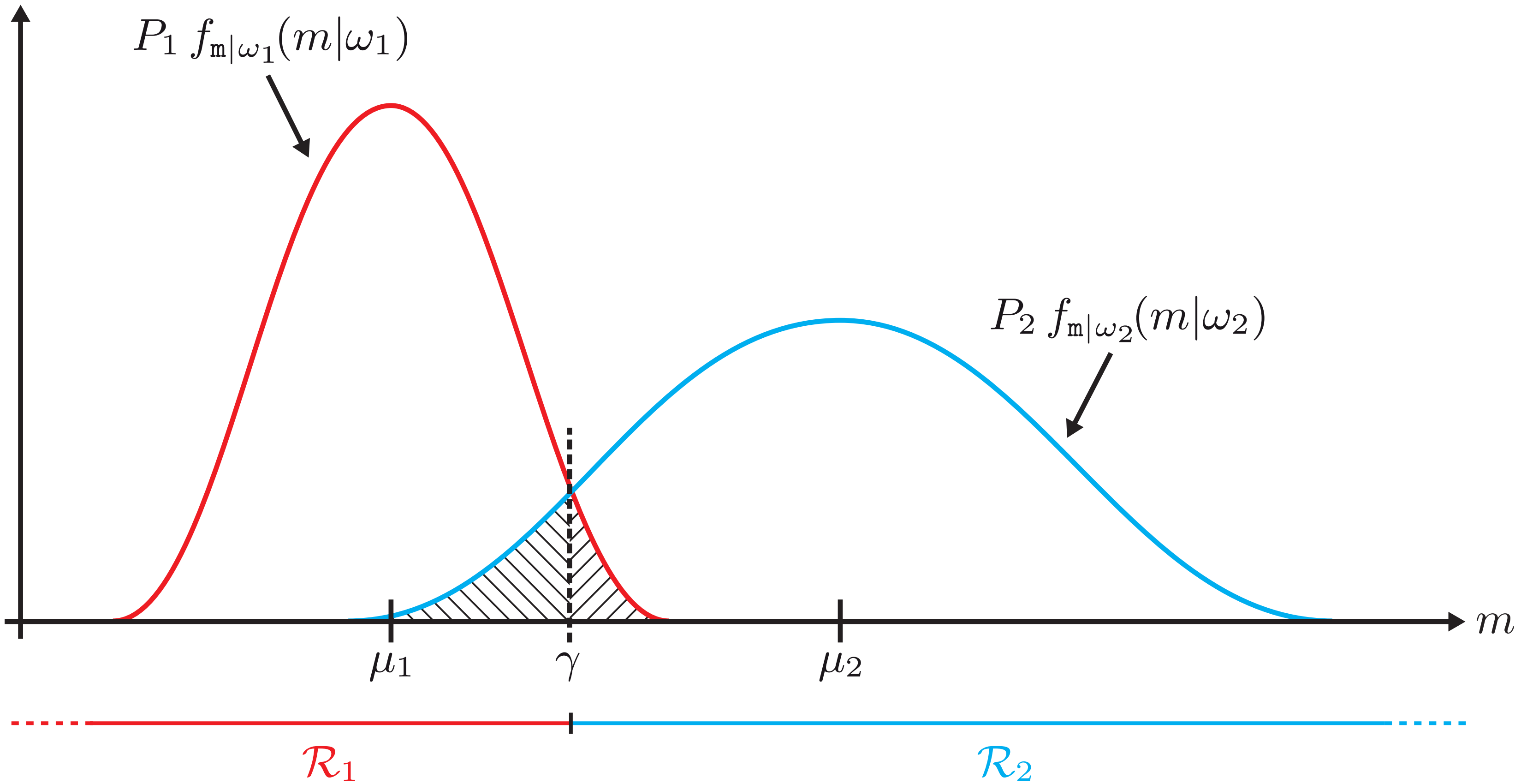


- Klassen mit m_1 oder m_2 alleine nicht trennbar! ■

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel: Optimale Entscheidungsgrenze, $K = 1,\ I = 2$

- Für beide Klassen werden oft Gauß-Dichten mit individuellen Parametern μ_i und σ_i angesetzt



- Entscheidungsgrenze degeneriert zu einem Schwellwert γ

Modell:

- $\mathbf{x} \in \omega_i \;\Rightarrow\; m(\mathbf{x}) = m$ mit WDF: $$\boxed{f_{\mathtt{m}|\omega_i}(m|\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}}$$

Dichte des Merkmals m für den Fall, dass $\mathbf{x}$ zur Klasse ω_i gehört

$\boxed{P_i := \Pr\{\mathbf{x} \in \omega_i\}}$ $\quad i = 1, 2$ Wahrscheinlichkeit, dass ein $\mathbf{x}$ zu ω_i gehört

- **Segmentierungsfehler** (Fehlerwahrscheinlichkeit):

$$\varepsilon(\gamma) = P_1 \int_{\gamma}^{\infty} f_{\mathtt{m}|\omega_1}(m|\omega_1)\,\mathrm{d}m + P_2 \int_{-\infty}^{\gamma} f_{\mathtt{m}|\omega_2}(m|\omega_2)\,\mathrm{d}m \quad \rightarrow \quad \text{Min.}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \gamma_{\text{opt}}(\mu_1, \sigma_1, P_1, \mu_2, \sigma_2, P_2)}$$

- für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$: $$\boxed{\gamma_{\text{opt}} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

11.1 Bereichsorientierte Segmentierung

- μ_i, σ_i, P_i aus Histogramm $\hat{h}(m)$ schätzen durch:

$$\boxed{\sum_m \left(f(m) - \hat{h}(m)\right)^2 \quad \rightarrow \quad \text{Min.}}$$

Anpassung der **Modelldichte** $f(m)$ an das (empirische) Histogramm $\hat{h}(m)$ mit der Methode der kleinsten Quadrate

$$\boxed{f(m) = f_{\mathtt{m}}(m|\mu_1, \sigma_1, P_1, \mu_2, \sigma_2, P_2) = f_{\mathtt{m}|\omega_1}(m) \cdot P_1 + f_{\mathtt{m}|\omega_2}(m) \cdot P_2}$$

Problem:

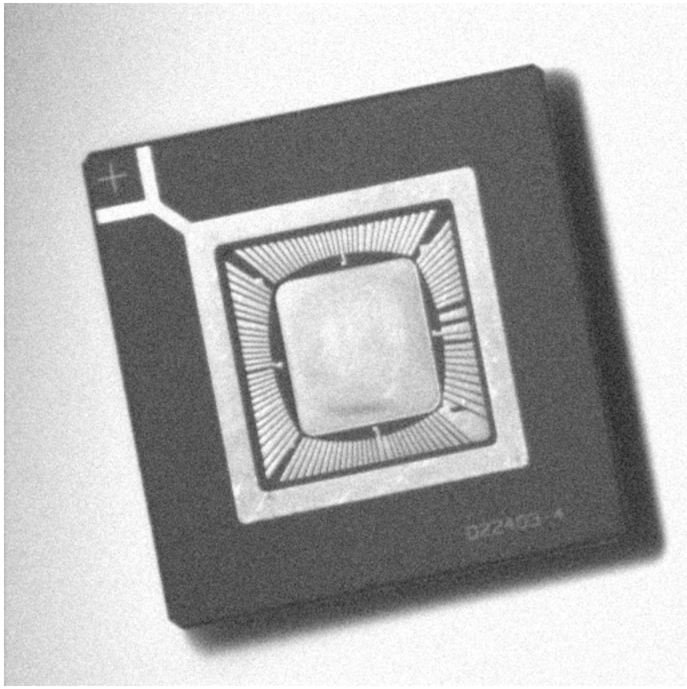
- Schwellwertverfahren liefern i. Allg. keine zusammenhängenden Gebiete

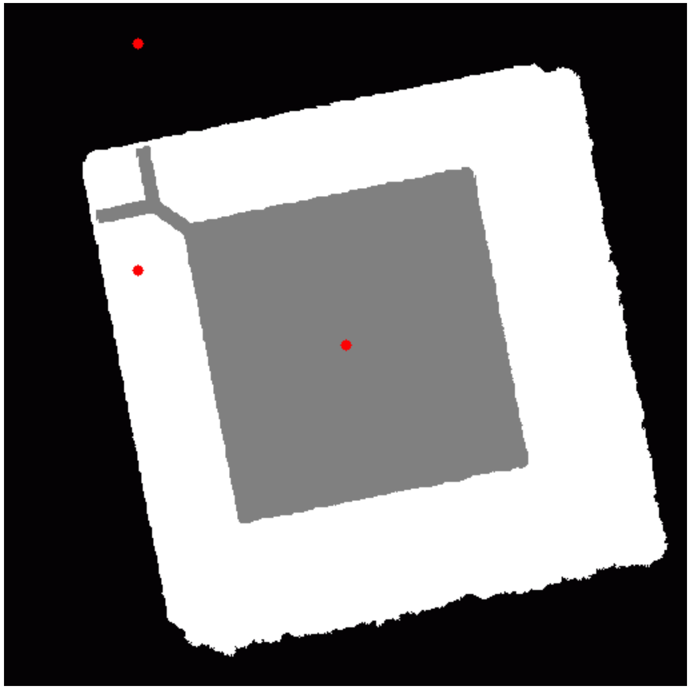
Andere Verfahren:

- **Bereichswachstumsverfahren**: Initialpunkte. Wachstum durch iteratives Hinzufügen von Nachbarpunkten, die mit dem Einheitlichkeitskriterium $\mathcal{E}$ konform sind, bis alle Pixel $\mathbf{x} \in \Omega_g$ einer Klasse ω_i zugewiesen sind.
- ***Pyramid Linking*** [BPF15, Kap. 15]

Beispiel: Bereichswachstumsverfahren

- Iterative Vergrößerung von Segmenten, die Einheitlichkeitskriterium $\mathcal{E}$ erfüllen
- Liefert zusammenhängende Segmente
- Vorgegebene Initialpunkte („Saatpunkte“, rot markiert)
- Nachteil: Abhängigkeit von der Wahl der Initialpunkte





Institut für Industrielle Informationstechnik

Kantendetektion:

- Findung der Grenzen zwischen bedeutungsvollen Bildbereichen

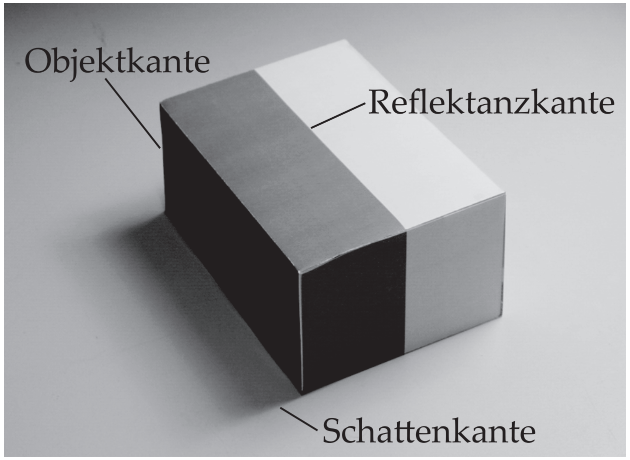
Definition: Kante

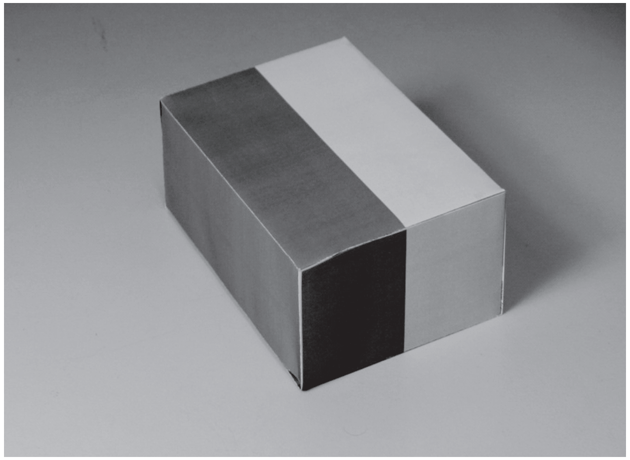
- Grenze zwischen zwei Gebieten, die in sich bezüglich eines Einheitlichkeitskriteriums homogen sind (auch **Stufenkante** genannt)

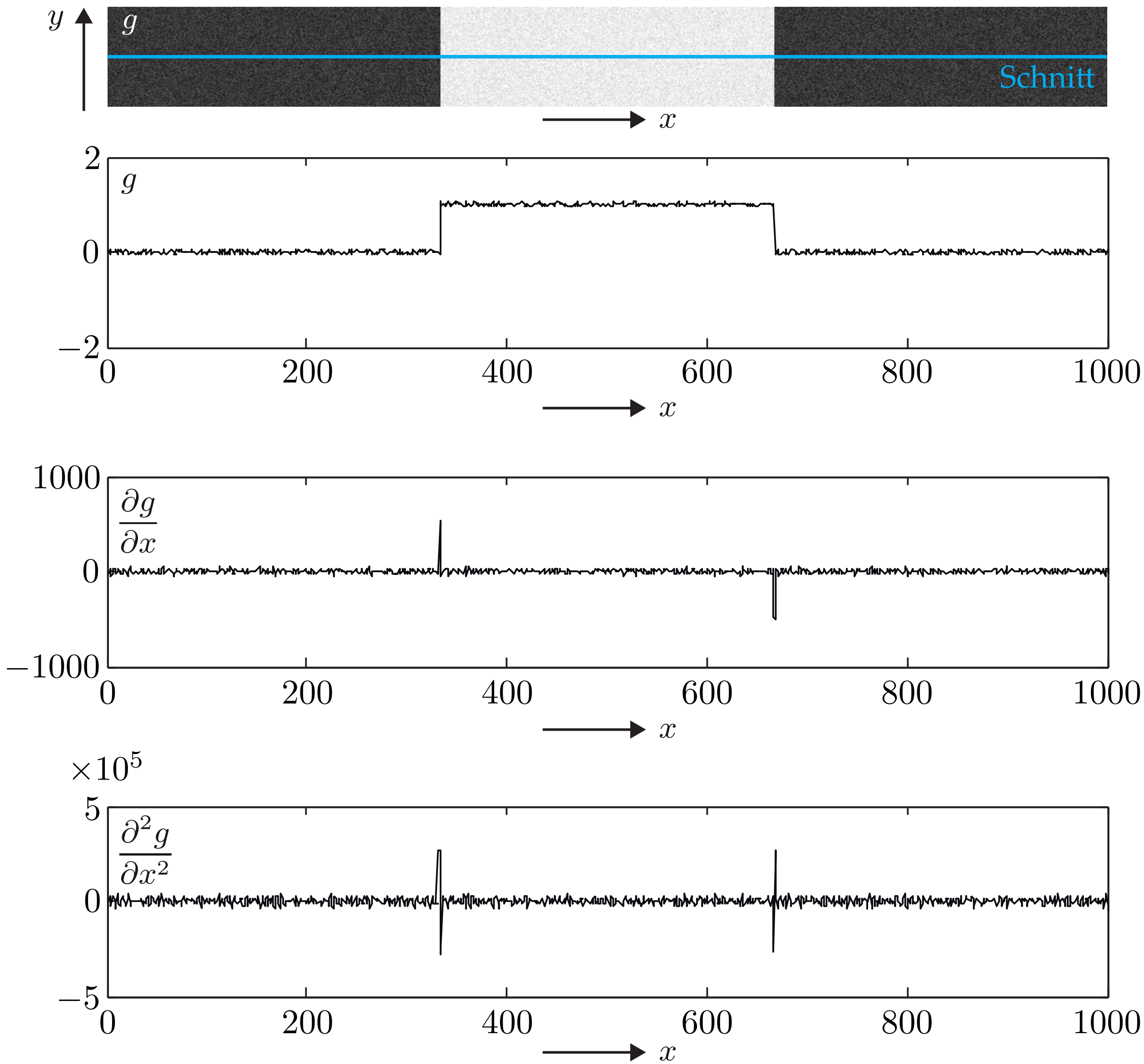
Einteilung von Kanten

- Objektkanten (Objektgeometrie)
- Reflektanzkanten
- Schattenkanten

} Scheinkanten, da keine geometrische Entsprechung







Extrema der 1. Ableitung (Gradient)

Nulldurchgänge der 2. Ableitung

Gesucht:

- lineare diskrete Filter zur Approximation von

$$\boxed{\operatorname{grad} g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}}$$

$\|\operatorname{grad} g(\mathbf{x})\|$: Maß für „Kantenstärke"

$\operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \perp$ Kante, d. h.

$\angle \operatorname{grad} g(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y}}{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x}}\right)$: Normalenrichtung der Kante

} wenn am Ort $\mathbf{x}$ eine Kante vorliegt

Diskrete Näherungen (eindimensional):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, g(x)\Big|_{x=m\Delta x} \approx d_m * g_m$$

Approximationen:

- Unsymmetrischer Differenzenquotient:

$$\frac{g(x) - g(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

- Symmetrischer Differenzenquotient:

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

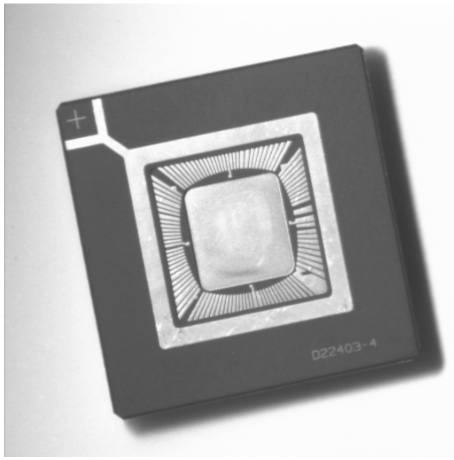
- Stirling'sche Approximation:

$$\frac{-g(x+2\Delta x) + 8\,g(x+\Delta x) - 8\,g(x-\Delta x) + g(x-2\Delta x)}{12\Delta x}$$

Impulsantwort d_m

	m	-3	-2	-1	0	1	2	3	
Unsymmetrisch	…	0	0	0	1	-1	0	0	…
Symmetrisch	…	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	…
Stirling	…	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	…

Beispiel zur Kantendetektion mit Gradientenoperatoren:

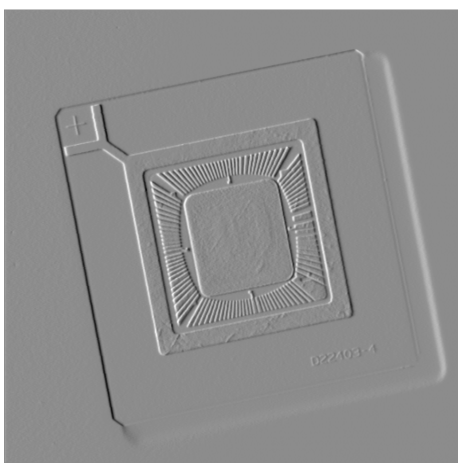


Symmetrischer Differenzenquotient ($\Delta x = \Delta y$)

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x} \approx \frac{g(x+\Delta x, y) - g(x-\Delta x, y)}{2\Delta x}$$

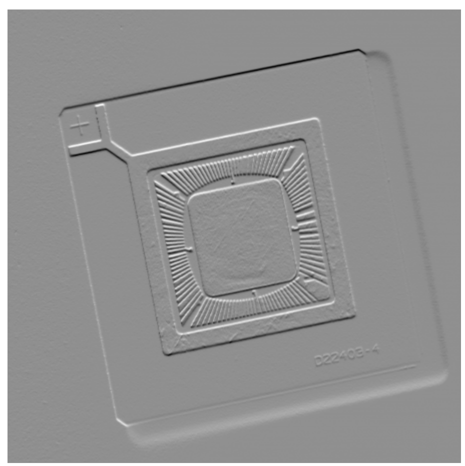
$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial y} \approx \frac{g(x, y+\Delta y) - g(x, y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

$\Big\{\Big($



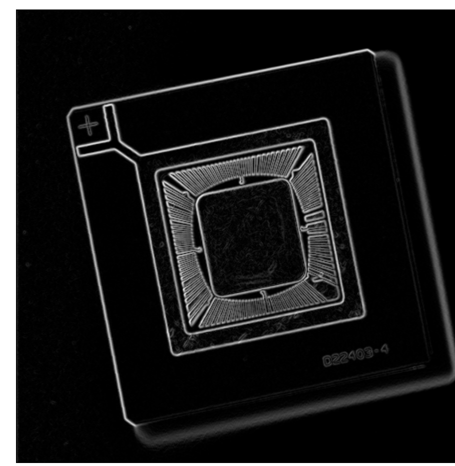
$\partial g(\mathbf{x})/\partial x$

$\Big)^2 + \Big($



$\partial g(\mathbf{x})/\partial y$

$\Big)^2\Big\}^{1/2} =$



Gradientenbetrag

Übertragungsfunktion eines Differenzierers

- Ideal:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underbrace{\mathrm{j}2\pi f}_{\text{ÜF}} \cdot G(f)$$

- Symmetrischer Differenzenquotient:

$$D_k = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{N}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k(N-1)}{N}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{N}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{k}{N}}\right)$$

$$= \mathrm{j}\cdot\sin\left(2\pi\,\frac{k}{N}\right)$$

$$\overset{k\ll N}{\approx} \mathrm{j}\cdot 2\pi\,\frac{k}{N} \qquad\qquad \frac{k}{N} \,\hat{=}\, \text{diskrete Frequenz}$$

$$D_0 = 0\,, \qquad D_{\frac{N}{4}} = \mathrm{j}\,, \qquad D_{\frac{N}{2}} = 0$$

Abfall für höhere Frequenzen

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruktion symmetrischer Ableitungsfilter der Länge $L = 2r+1$

- Ansatz:

$$ {}^r d_m = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m = 0 \quad \vee \quad |m| > r \\ {}^r d_m = -{}^r d_{-m} : & \text{reelle, ungerade Ortsfunktion} \end{cases} $$

korrespondiert mit rein imaginärer, ungerader Fourier-Transformierten

- DFT:

$$ {}^r D_k = \sum_{\nu=0}^{N-1} {}^r d_\nu \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{k\nu}{N}} = \sum_{\nu=1}^{r} {}^r d_\nu \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{k\nu}{N}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \frac{k\nu}{N}} \right), \qquad r < \frac{N}{2} $$

$$ = -2\mathrm{j} \cdot \sum_{\nu=1}^{r} {}^r d_\nu \sin\left(2\pi \frac{k\nu}{N} \right) $$

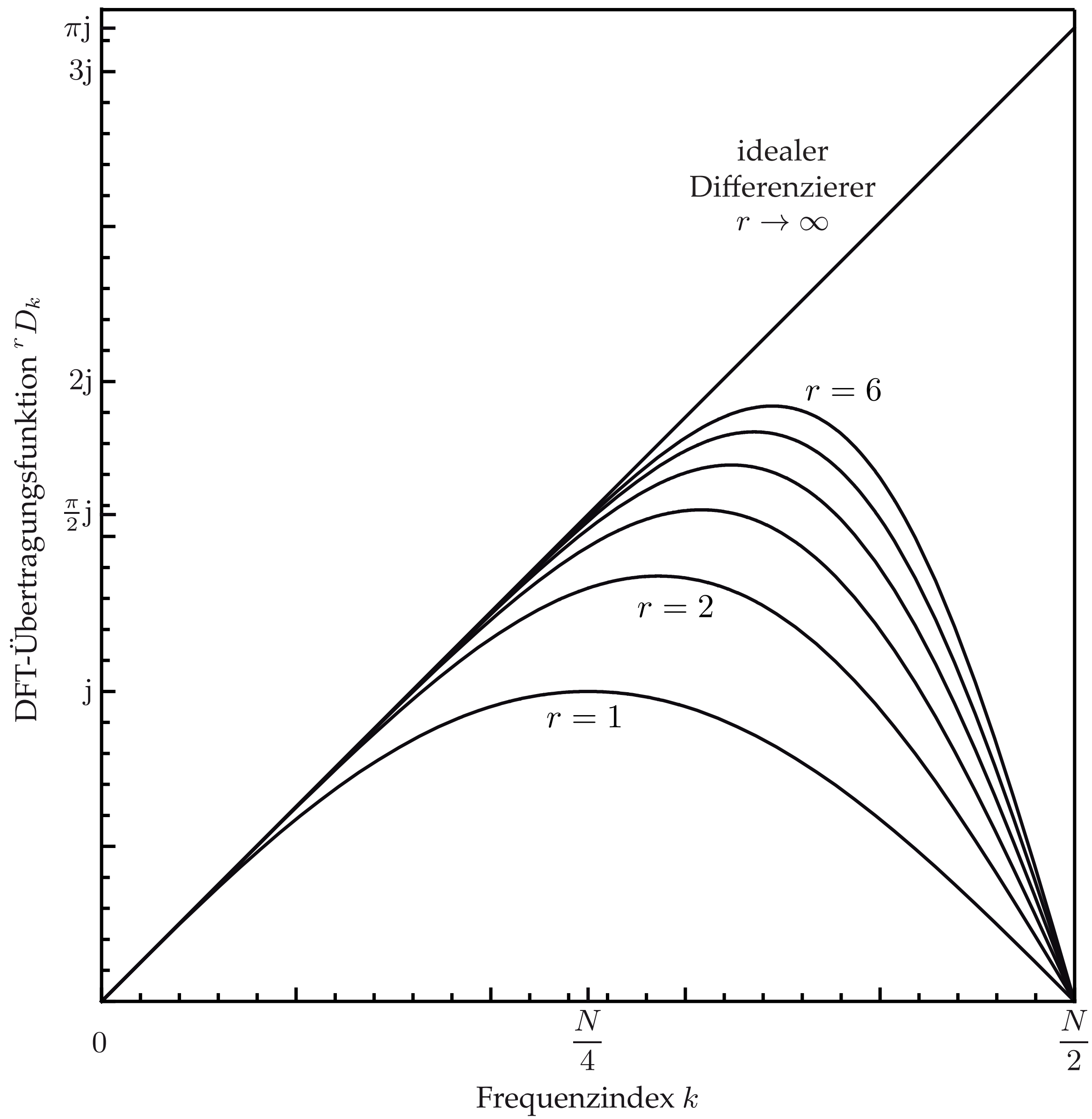
Taylor-Entwicklung in Abhängigkeit von k/N

$\{{}^r d_\nu\}$ so wählen, dass:

- lineares Glied $\stackrel{!}{=} \mathrm{j}2\pi \, k/N$
- $r-1$ folgende Glieder $\stackrel{!}{=} 0$

11.2.1 Gradientenfilter

Übertragungsfunktionen symmetrischer linearer Ableitungsfilter der Länge $L = 2\,r + 1$



11.2.1 Gradientenfilter

Differentiation mittels der DFT (eindimensional)

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \approx \mathrm{DFT}^{-1}\{G_k \cdot D_k\}$$

$$D_k := \begin{cases} \mathrm{j}\,2\pi \frac{k}{N} & \text{für} \quad k < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{für} \quad k = \frac{N}{2} \\ \mathrm{j}\,2\pi \left(\frac{k-N}{N}\right) & \text{für} \quad k > \frac{N}{2} \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

problematisch bei stark ausgeprägtem Leckeffekt

Probleme der Gradientenfilter:

- Differentiation verstärkt Rauschen!
  - $\longrightarrow$ Lösung: Unterdrückung hoher Ortsfrequenzen durch TP-Filterung
  - $\longrightarrow$ Brauchbare lineare Kantendetektionsfilter haben BP-Charakter
- Filterergebnis zeigt breite Konturen
- unterbrochene Konturen
- falsche Konturen, Artefakte

Nachbearbeitung nötig:
- Kantenverdünnung
- Kantenverfolgung
- Unterdrückung falscher Kanten

Karlsruher Institut für Technologie

Differenzierter Gauß-TP

- gebräuchliche, **störungsunempfindliche** Gradientenapproximation zur Kantendetektion

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left(h(\mathbf{x}) ** g(\mathbf{x})\right) = \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\alpha})\, h(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\alpha})\, \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} h(\mathbf{x})\right)}_{d^x(\mathbf{x})} ** g(\mathbf{x})$$

$$h(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$\operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \approx \left(\operatorname{grad} h(\mathbf{x})\right) ** g(\mathbf{x})$$

$$\operatorname{grad} h(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\sigma^2}\, h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} d^x(\mathbf{x}) \\ d^y(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Karlsruher Institut für Technologie

- Übertragungsfunktion:

$$d^x(\mathbf{x}) = -\frac{x}{2\pi\sigma^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}} = -\mathrm{j}2\pi x\,\frac{-\mathrm{j}}{4\pi^2\sigma^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

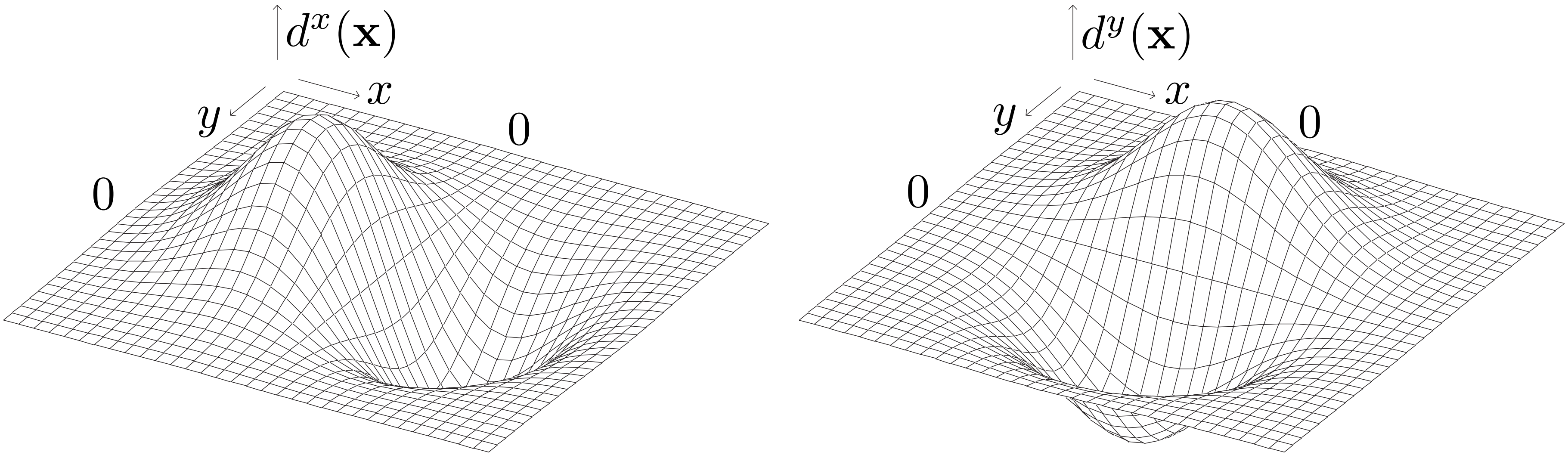
$$D^x(\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial f_x}\left(\frac{-\mathrm{j}}{2\sigma^2\pi}\,\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2\|\mathbf{f}\|^2}\right)$$

$$D^x(\mathbf{f}) = \mathrm{j}\,2\pi f_x\,\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2\|\mathbf{f}\|^2} \underset{\text{kleine } \|\mathbf{f}\|}{\underset{\uparrow}{\approx}} \mathrm{j}\,2\pi f_x$$

Diskrete Approximation:

- Abtastung von $d^x(\mathbf{x})$ und $d^y(\mathbf{x})$ im Ortsbereich $\rightarrow$ d^x_{mn}, d^y_{mn}
- Abtastung von $D^x(\mathbf{f})$ und $D^y(\mathbf{f})$ im Ortsfrequenzbereich $\rightarrow$ D^x_{kl}, D^y_{kl}

Impulsantworten des differenzierten Gauß-Tiefpasses



11.2.1.4 Einfache Kantenoperatoren

Sobel-Operator

- gebräuchlicher Kantendetektor
- **Sobel-Filter** approximieren grob die differenzierten Gauß-Tiefpässe:

$$s^x_{mn}: \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline\end{array} \qquad s^y_{mn}: \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

- **Sobel-Operator**: $\left(|s^x_{mn} ** g_{mn}|^q + |s^y_{mn} ** g_{mn}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

literaturüblich: $q = 1, 2, \infty$

Mit dieser q-Norm lassen sich für Kantendetektionszwecke auch die Komponenten anderweitig berechneter Gradientenapproximationen verarbeiten

$$s^x_{mn} = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad ** \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Binomial-TP bzgl. y

Symm. Differenzen-quotient bzgl. x

DFT

$$S^x_{kl} = \underbrace{2\left(1 + \cos\left(2\pi\,\frac{l}{N}\right)\right)}_{\text{TP}} \cdot \mathrm{j}\,\sin\left(2\pi\,\frac{k}{N}\right)$$

für eine $N \times N$-DFT

11.2.1.4 Einfache Kantenoperatoren

Roberts-Operator

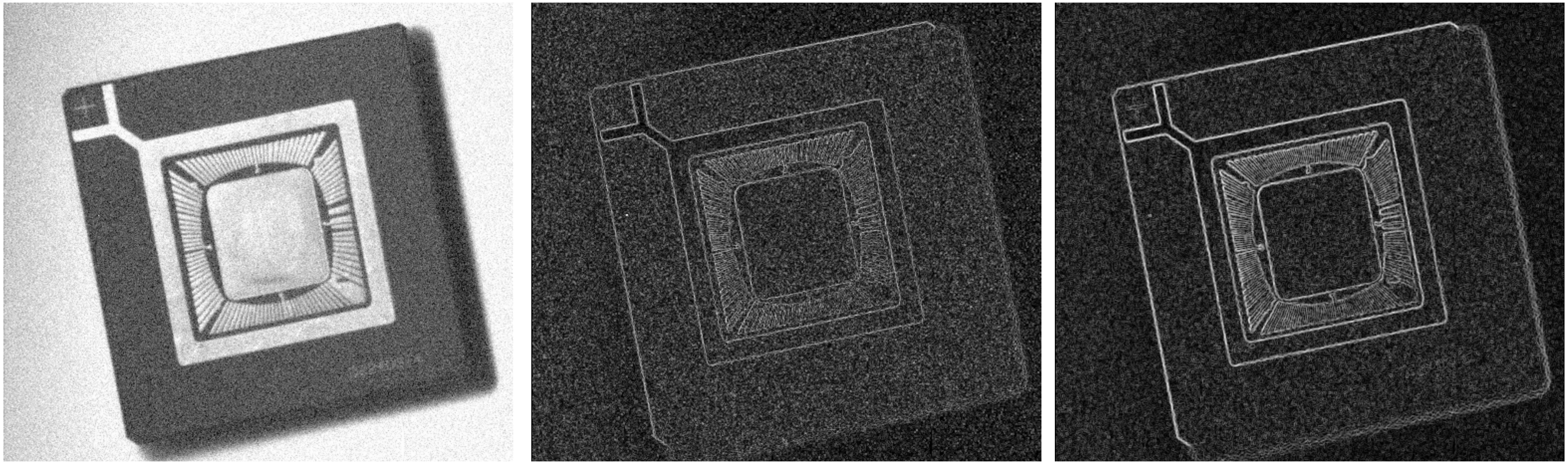
- nutzt die kleinstmöglichen Filtermasken (Größe 2×2) zur Kantendetektion

$$\boxed{k_{mn} = \left(|g_{m,n} - g_{m-1,n-1}|^q + |g_{m-1,n} - g_{m,n-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

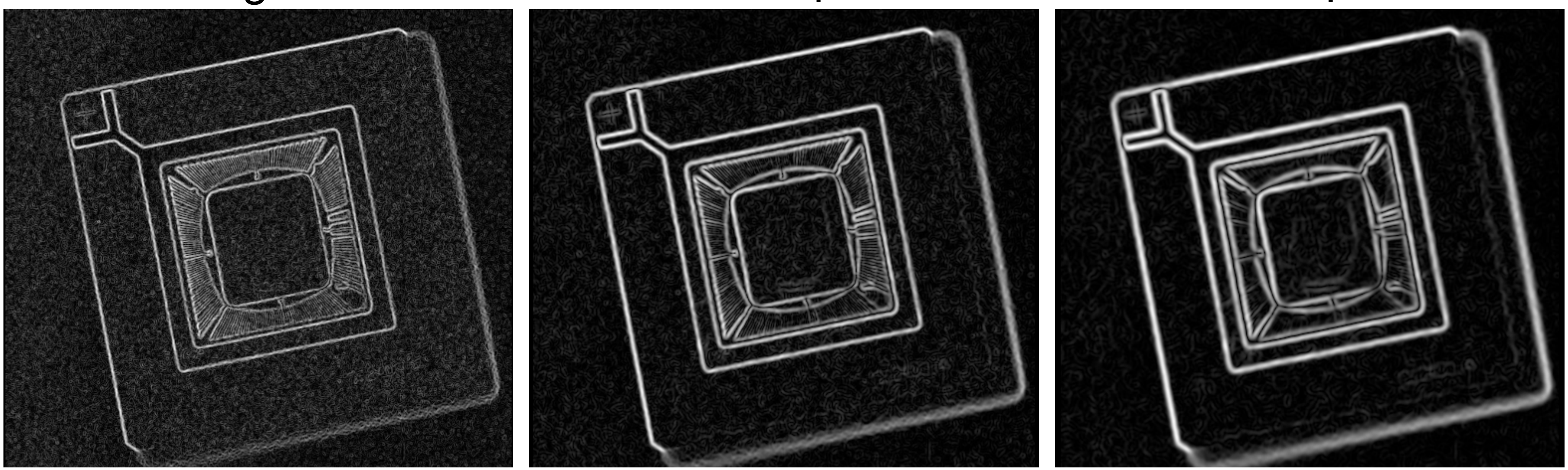
Eigenschaften:

- im Vergleich zum Sobel-Operator viel rauschempfindlicher
- dünnere Kanten als Sobel
- unsymmetrisch → Verschiebung der Kanten

11.2.1 Gradientenfilter

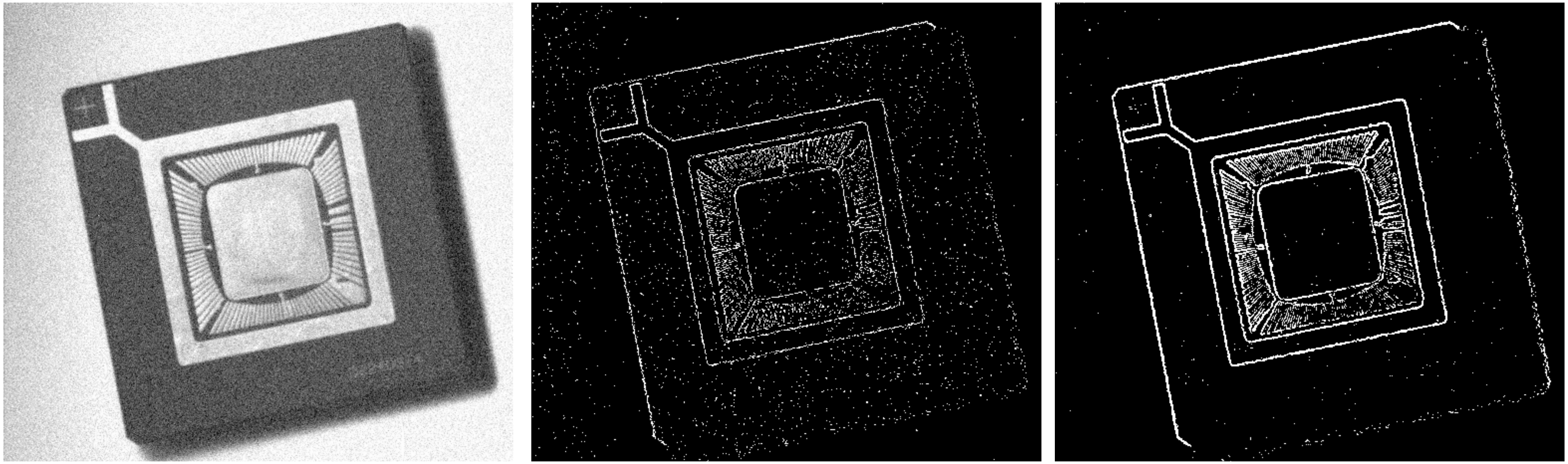


Original | Roberts-Operator | Sobel-Operator

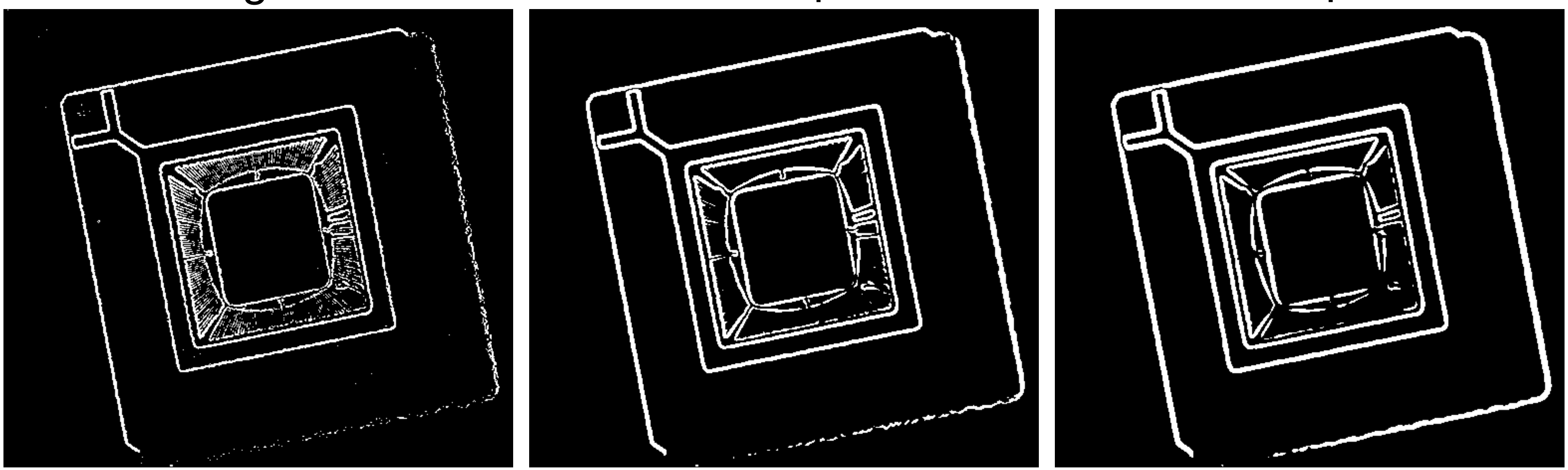


Differenzierter Gauß-Tiefpass: $L=5$ $(\sigma = 0{,}8)$, $L=9$ $(\sigma = 1{,}5)$, $L=13$ $(\sigma = 2{,}2)$

11.2.1 Gradientenfilter

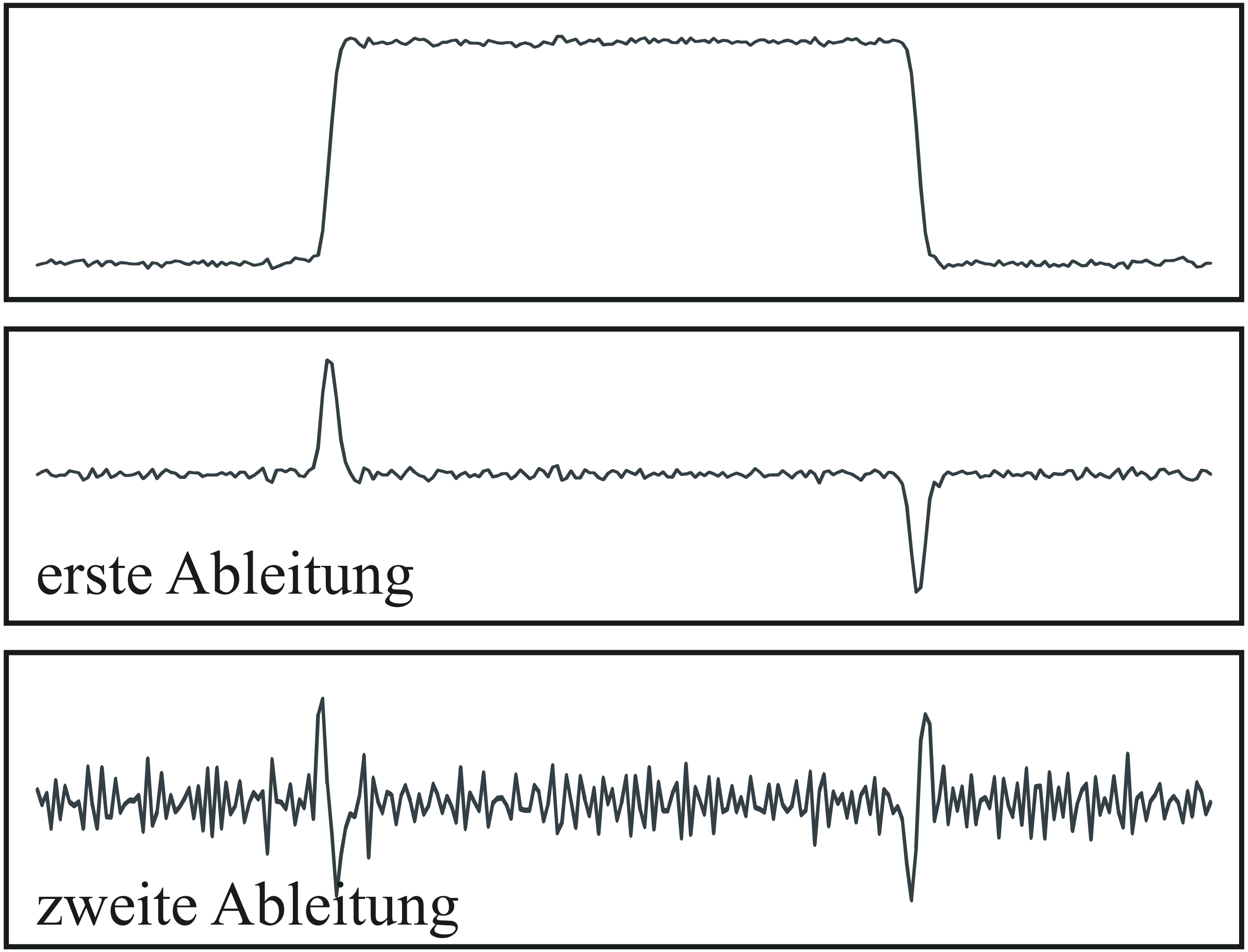


Original Roberts-Operator Sobel-Operator



Differenzierter Gauß-Tiefpass: $L = 5$ $(\sigma = 0{,}8)$, $L = 9$ $(\sigma = 1{,}5)$, $L = 13$ $(\sigma = 2{,}2)$

Zweifache Differentiation sehr störanfällig!



Karlsruher Institut für Technologie

Laplacian-of-Gaussian-Operator (LoG) (Marr & Hildreth 1980)

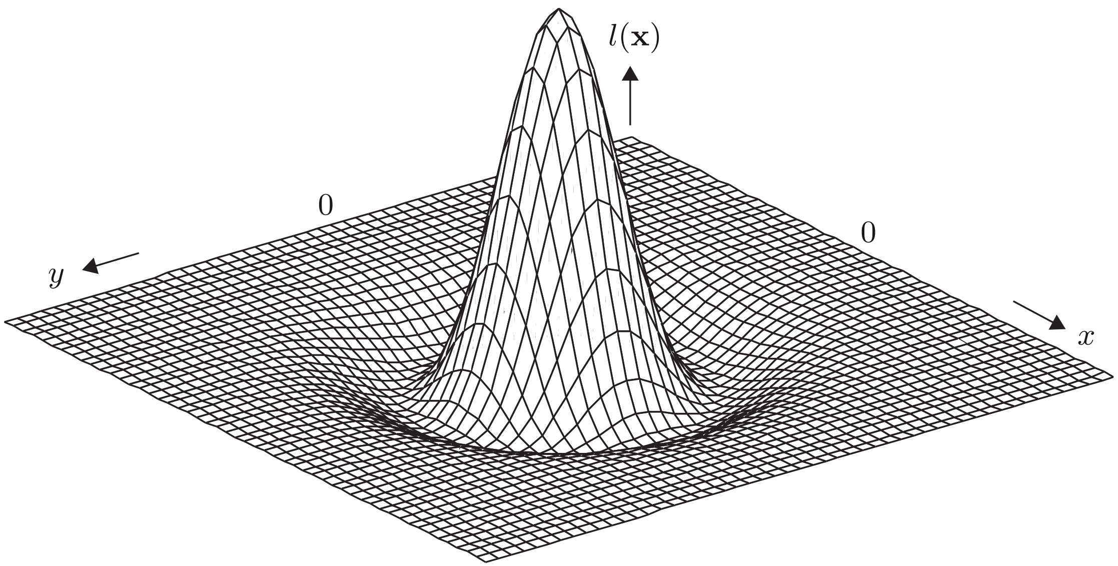
$$-\Delta(h(\mathbf{x}) ** g(\mathbf{x})) = \underbrace{(-\Delta h(\mathbf{x}))}_{=:\, l(\mathbf{x})} ** g(\mathbf{x})$$

Gauß-TP zur Störungsunterdrückung

$$l(\mathbf{x}) = -\frac{\partial^2 h(\mathbf{x})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h(\mathbf{x})}{\partial y^2}$$

$$= \frac{2\sigma^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi\sigma^6}\, \mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mathbf{f}) = 4\pi^2 \|\mathbf{f}\|^2\, \mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2\|\mathbf{f}\|^2}$$



„Mexikanerhut“

$L(\mathbf{0}) = 0\,, \quad L(\infty) = 0:$ BP-Charakter

Institut für Industrielle Informationstechnik

Karlsruher Institut für Technologie

Diskrete Realisierungsmöglichkeiten:

- Abtastung von $l(\mathbf{x}) \rightarrow l_{mn}$

Maske großzügig wählen: Kantenlänge $> 7\sigma$ (kleinste von Marr/Hildreth verwendete Maske war: $\sigma = 5\,\Delta x \rightarrow$ Kantenlänge $35\,\Delta x$)

- Abtastung von $L(\mathbf{f}) \rightarrow L_{kl}$
- Approximation durch **Difference-of-Gaussians-Filter** (DoG)

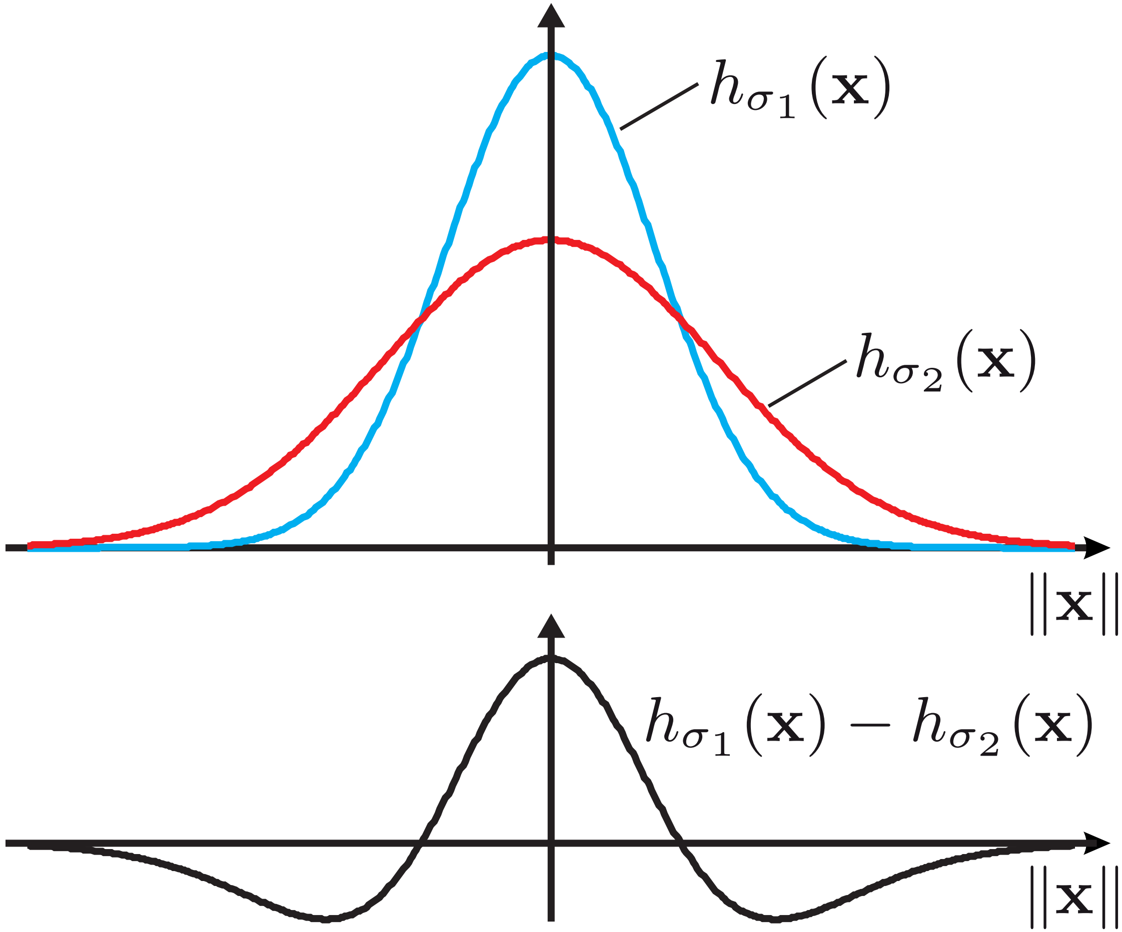
$$l(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_2^2}} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 1{,}6$$

durch Binomialfilter realisieren!

Betragsmaximum der DoG-Übertragungsfunktion:

$$\|\mathbf{f}\|_{\max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

Difference of Gaussians



11.2.2 Kantendetektion mit Hilfe der zweiten Ableitung

Vorteile:

- 1 Pixel breite Kanten

  → keine Kantenverdünnung notwendig

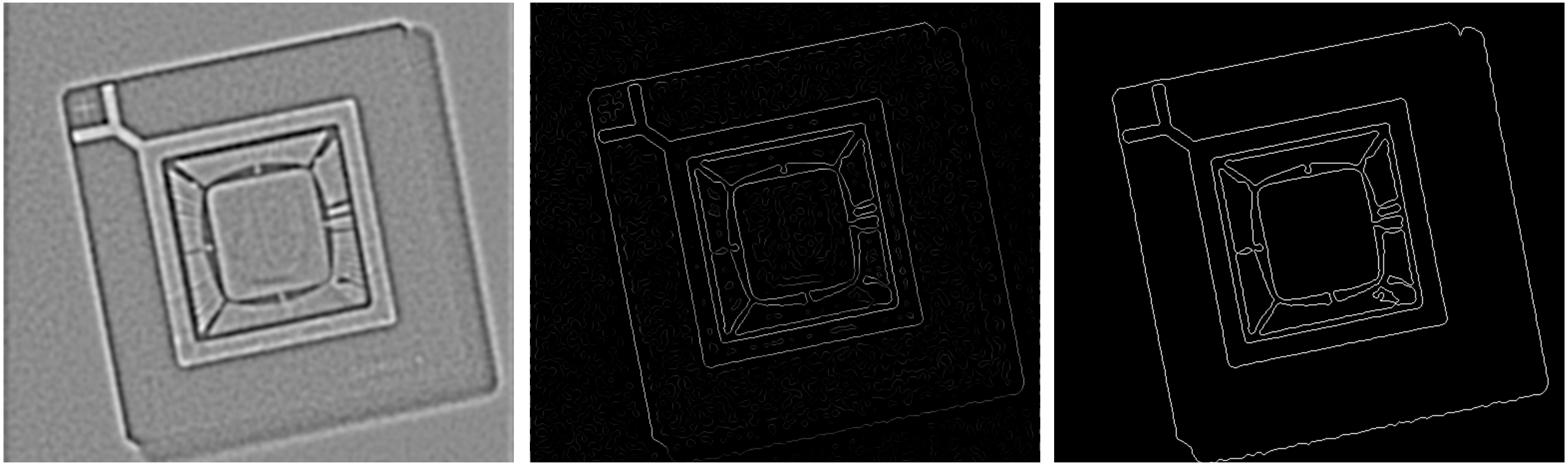
- angelehnt an menschliches visuelles System (an dessen Datenverarbeitung zur Kantenextraktion)

Nachteile:

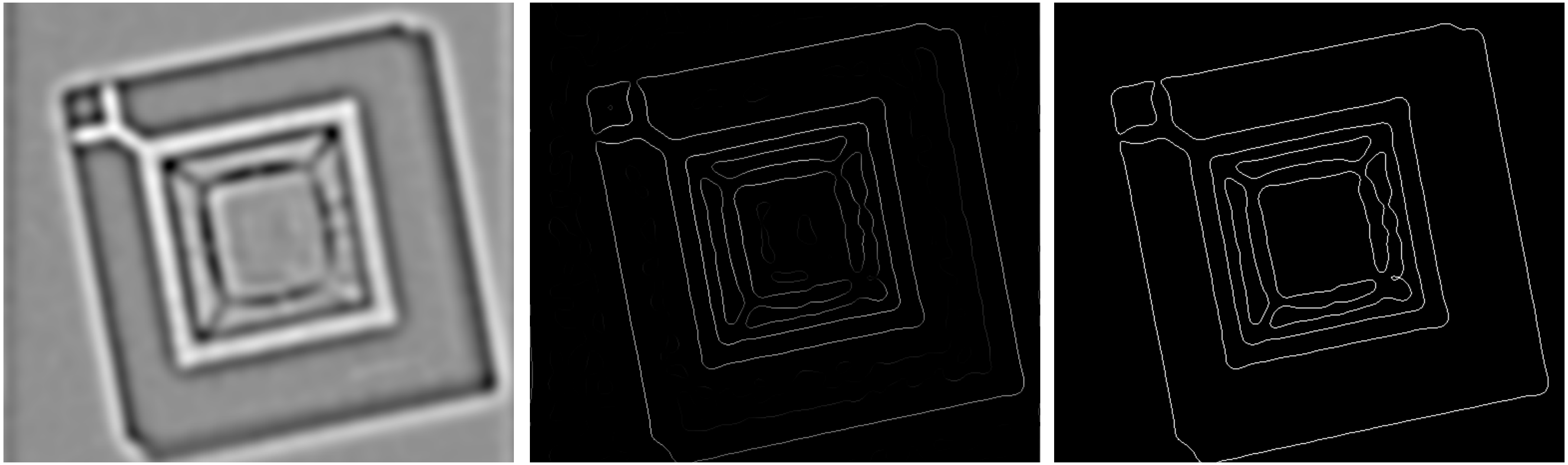
- Scheinkanten, da $\Delta g(\mathbf{x}) = 0$ nur notwendig für Kanten
- Kantenverschiebung wegen ausgedehnter Impulsantwort des LoG- bzw. DoG-Filters

  → Nachverarbeitung notwendig
  (z. B. Verifikation von Kanten anhand des Gradientenbetrags)

11.2.2 Kantendetektion mit Hilfe der zweiten Ableitung



LoG-Filterung ($\sigma = 2{,}5$); Steigung der Nulldurchgänge; Binarisierung.



LoG-Filterung ($\sigma = 7{,}5$); Steigung der Nulldurchgänge; Binarisierung.