8. Bildsignale

Institut für Industrielle Informationstechnik

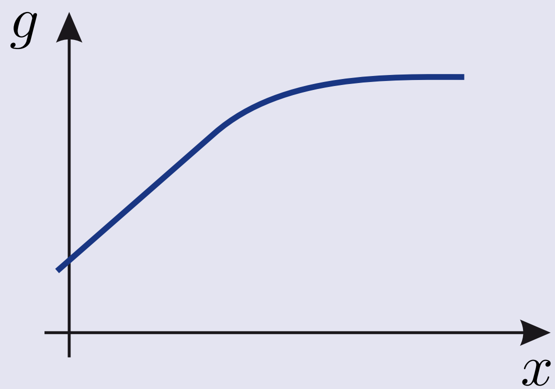
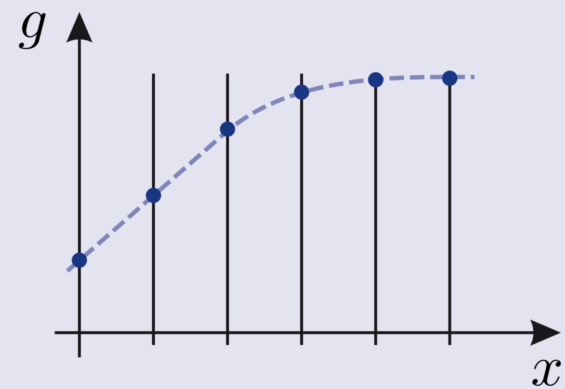
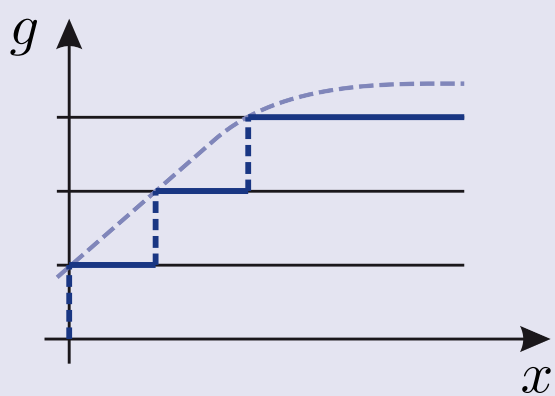
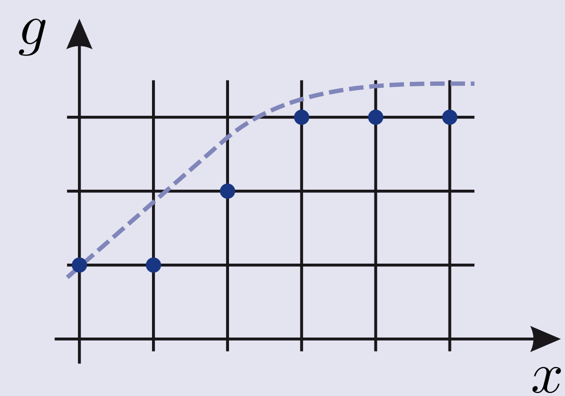
8.1 Mathematische Beschreibung von Bildsignalen

Speicherung + Verarbeitung im Digitalrechner erfordern:

- Diskretisierung der Werte $\mathbf{g}$
- Diskretisierung der Orte $\mathbf{x}$
- endliche Beschränkung des Ortsbereiches
- endliche Beschränkung der Werte $\mathbf{g}$

Vereinfachung: Betrachtung von Signalen $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Institut für Industrielle Informationstechnik

Wert g	Ort x	
	kontinuierlich	**diskret**
kontinuierlich		
diskret		

Karlsruher Institut für Technologie

Diskretisierung von Ort und Wert

grob

fein

wenig Speicherbedarf,
geringe Rechenzeit

Kompromiss
⟷
notwendig

geringer Informationsverlust,
Bilder hoher Güte

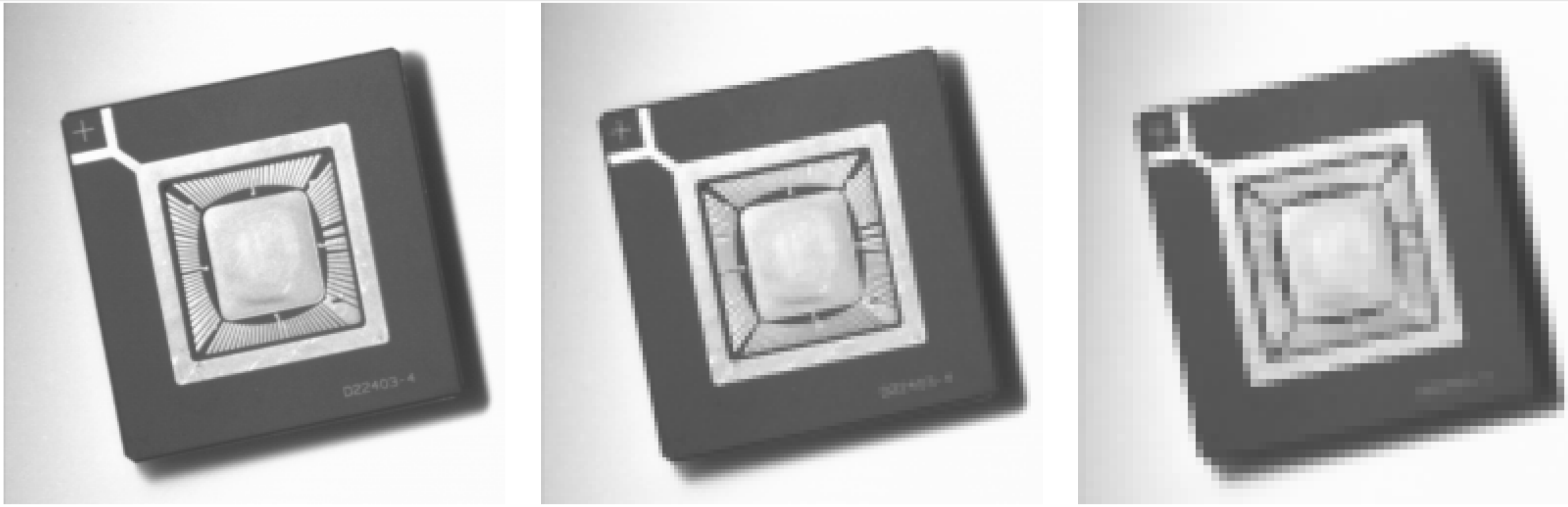
Wie grob darf man Ort und Wert diskretisieren, um wesentliche Signalinhalte nicht zu verlieren?

Qualitative, subjektive Antwort:

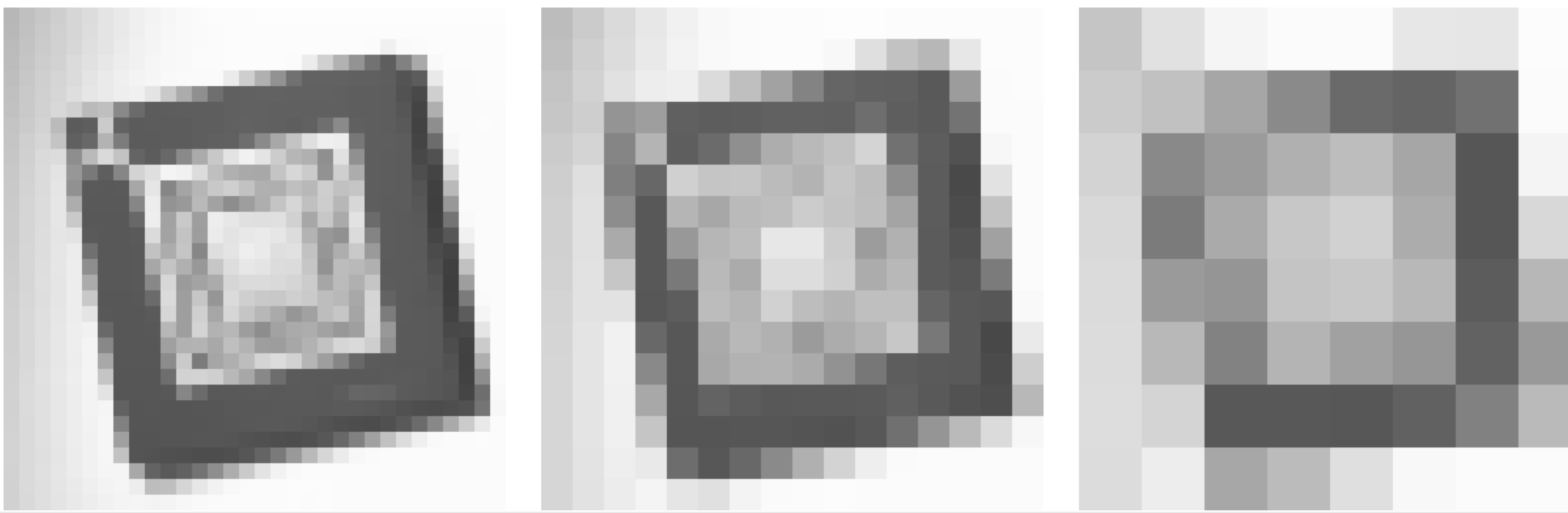
Für zufriedenstellenden visuellen Eindruck erfordern:

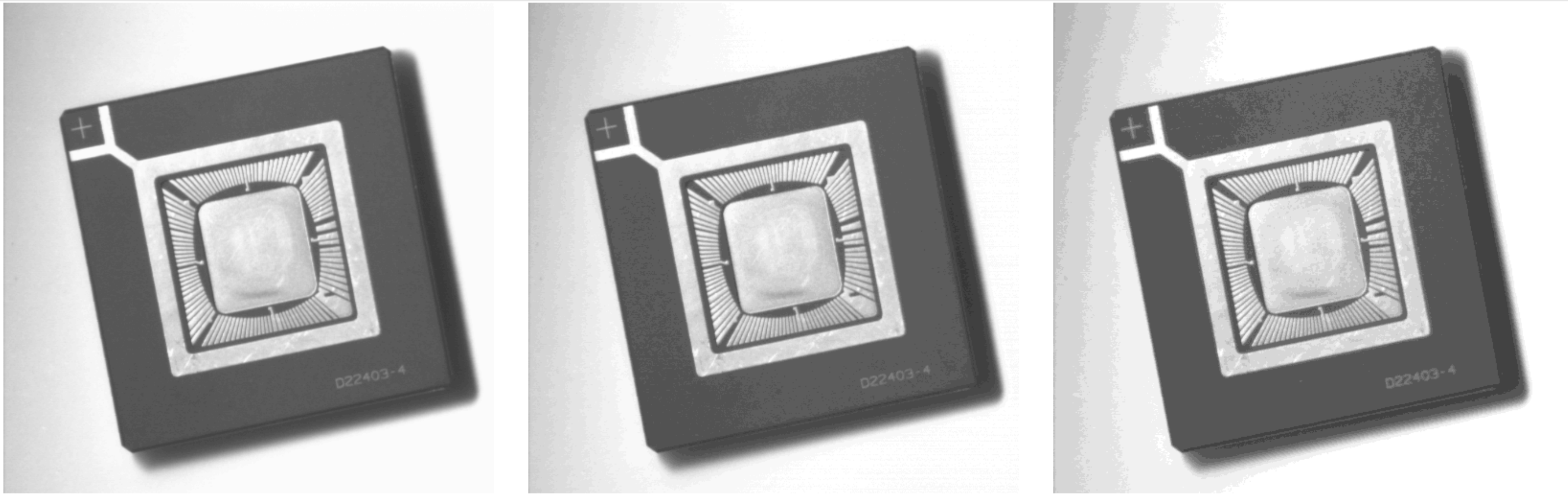
- detailreiche Bilder eine feine Ortsdiskretisierung
- detailarme Bilder eine feine Wertdiskretisierung (Scheinkanten)

8.1 Mathematische Beschreibung von Bildsignalen

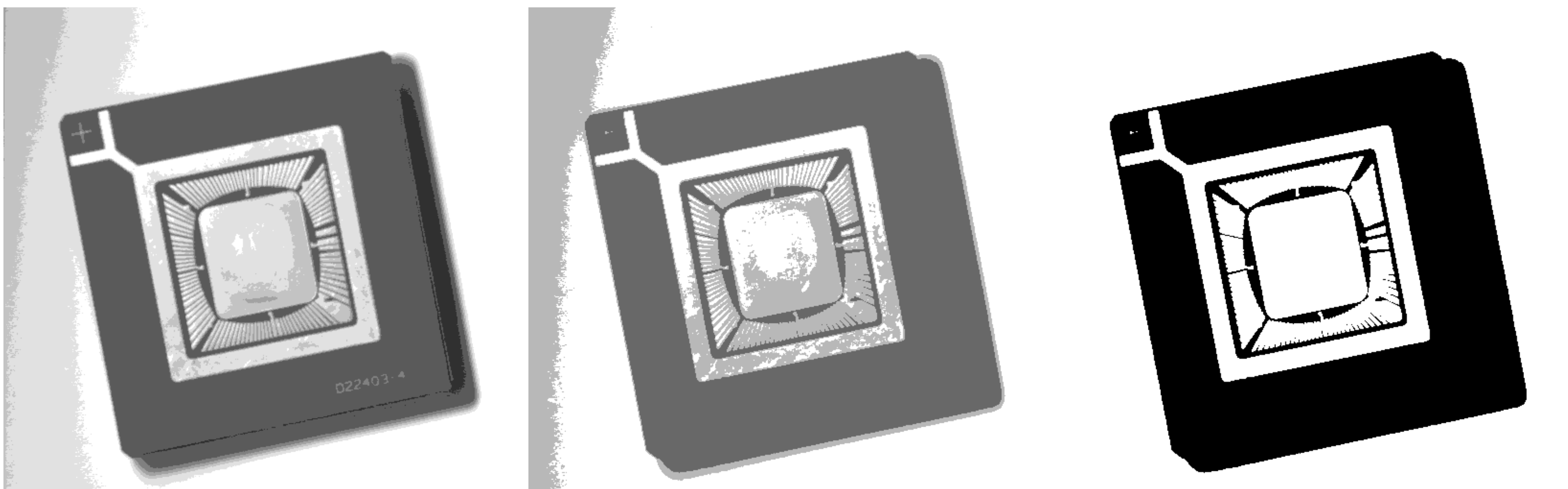


↑ 256×256 ↓ 32x32 ↑ 128×128 ↓ 16x16 ↑ 64×64 ↓ 8x8





↑ 64 Werte ↓ 8 Werte | ↑ 32 Werte ↓ 4 Werte | ↑ 16 Werte ↓ 2 Werte



8.3.1 Definition (eindimensional)

- Hintransformation:

$$G(f) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f x}\,\mathrm{d}x =: \mathcal{F}\{g(x)\} \qquad (*)$$

- Rücktransformation:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\,\mathrm{d}f = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} \qquad (**)$$

$$g(x), G(f):\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

f ist die mit x korrespondierende **Ortsfrequenz**, $[f] = [x]^{-1}$

($\omega = 2\pi f$: zugehörige Kreisfrequenz)

Bedeutung von (**): $g(x)$ wird aus **überabzählbar unendlich vielen komplexen harmonischen Schwingungen**, die mit $G(f)$ gewichtet werden, additiv synthetisiert

Institut für Industrielle Informationstechnik

Qualitative Aussage:

Feine Details von $g(x)$	$\longleftrightarrow$	hochfrequente Anteile von $G(f)$
Langsam mit x veränderliche Anteile von $g(x)$	$\longleftrightarrow$	niederfrequente Anteile von $G(f)$

Die Fourier-Transformation ist eine **globale** Transformation.
Für jede Frequenz hängt $G(f)$ vom gesamten Verlauf von $g(x)$ ab.

$$G(\mathbf{f}) = \mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\} := \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_x x}\mathrm{d}x\Bigg)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_y y}\mathrm{d}y$$

Separabilität

$$\mathbf{x} = (x, y)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{f} = (f_x, f_y)^{\mathrm{T}}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\mathbf{f})\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{f})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{f}$$

vektorielle Formulierung gilt auch im N-dimensionalen Fall

Eigenschaften der 2D-Fourier-Transformation

- **Separationssatz**:

$$g(\mathbf{x}) = g_1(x)\cdot g_2(y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G_1(f_x)\cdot G_2(f_y)$$

Jeder Faktor wird für sich eindimensional transformiert

Bsp.: $$g(\mathbf{x}) = \delta(x)\,\cos(2\pi f_{y_0} y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1(f_x)\,\frac{1}{2}\big(\delta(f_y + f_{y_0}) + \delta(f_y - f_{y_0})\big)$$

- **Lineare Koordinatentransformation**:
  Korrelat der eindimensionalen (Orts-)Skalierung im Mehrdimensionalen

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \qquad \det \mathbf{A} \neq 0$$

$\mathbf{A}$: nichtsinguläre 2×2-Matrix

$$\mathcal{F}\{g(\mathbf{A}\mathbf{x})\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{A}\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

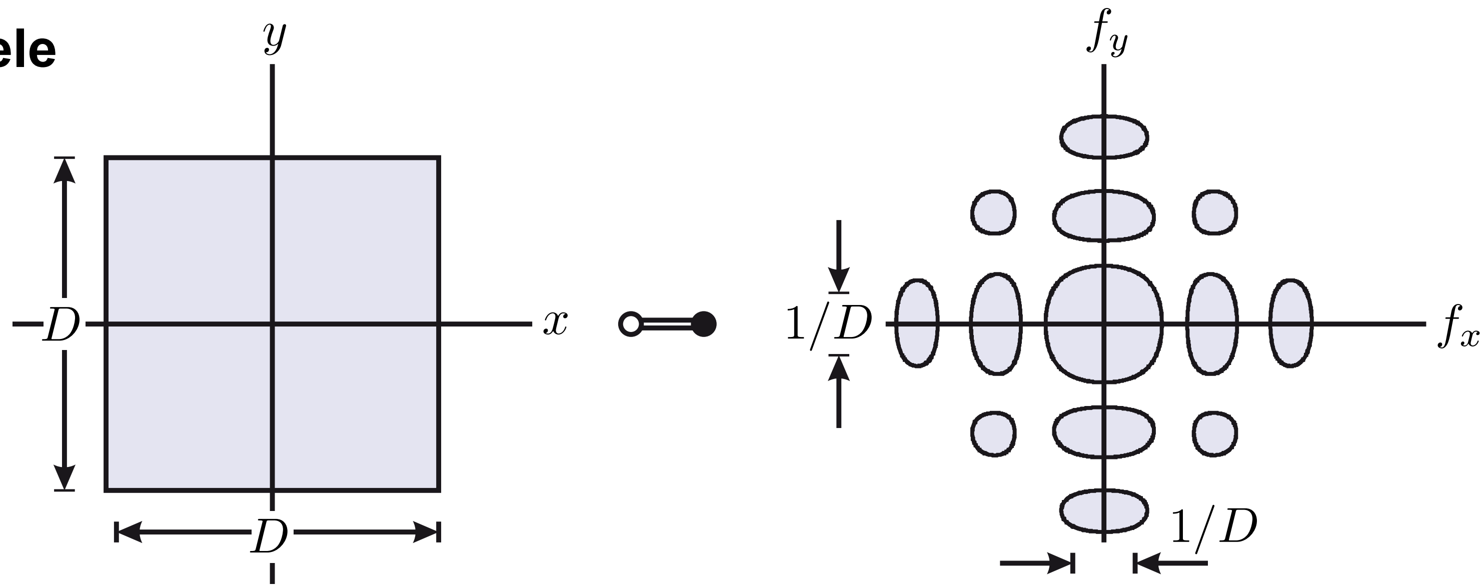
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = |\det \mathbf{A}| \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= |\det \mathbf{A}|^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi((\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{f})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

$$= |\det \mathbf{A}|^{-1}\, G((\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{f})$$

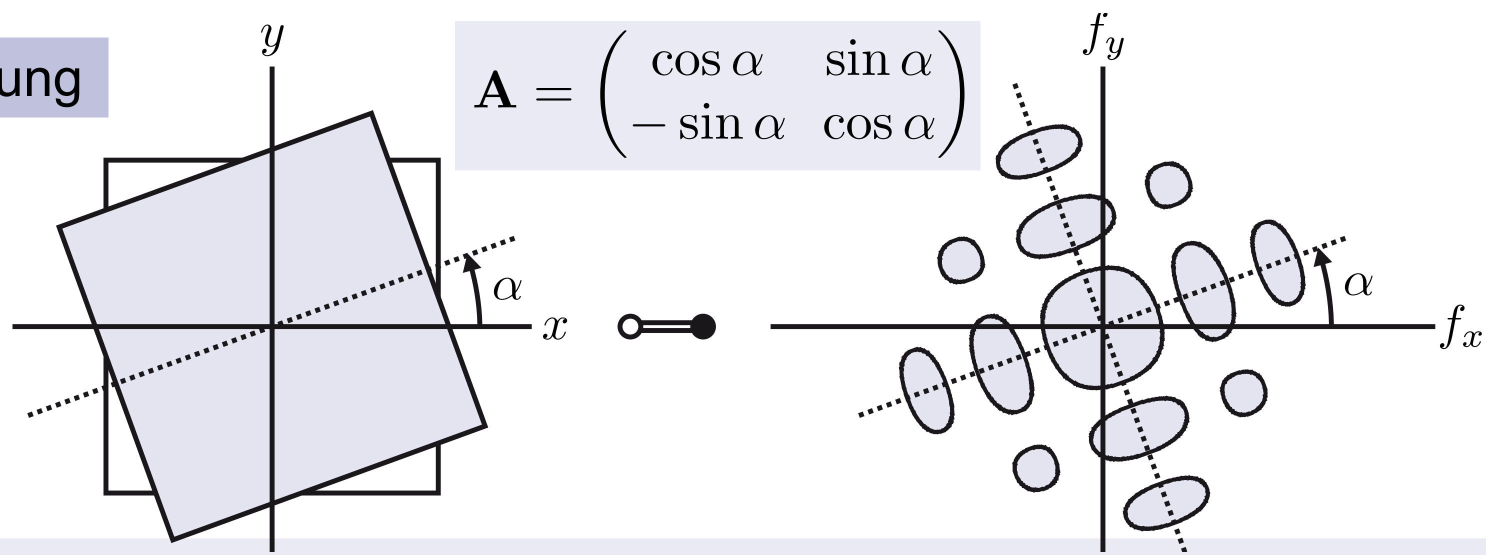
Karlsruher Institut für Technologie

Beispiele



Drehung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

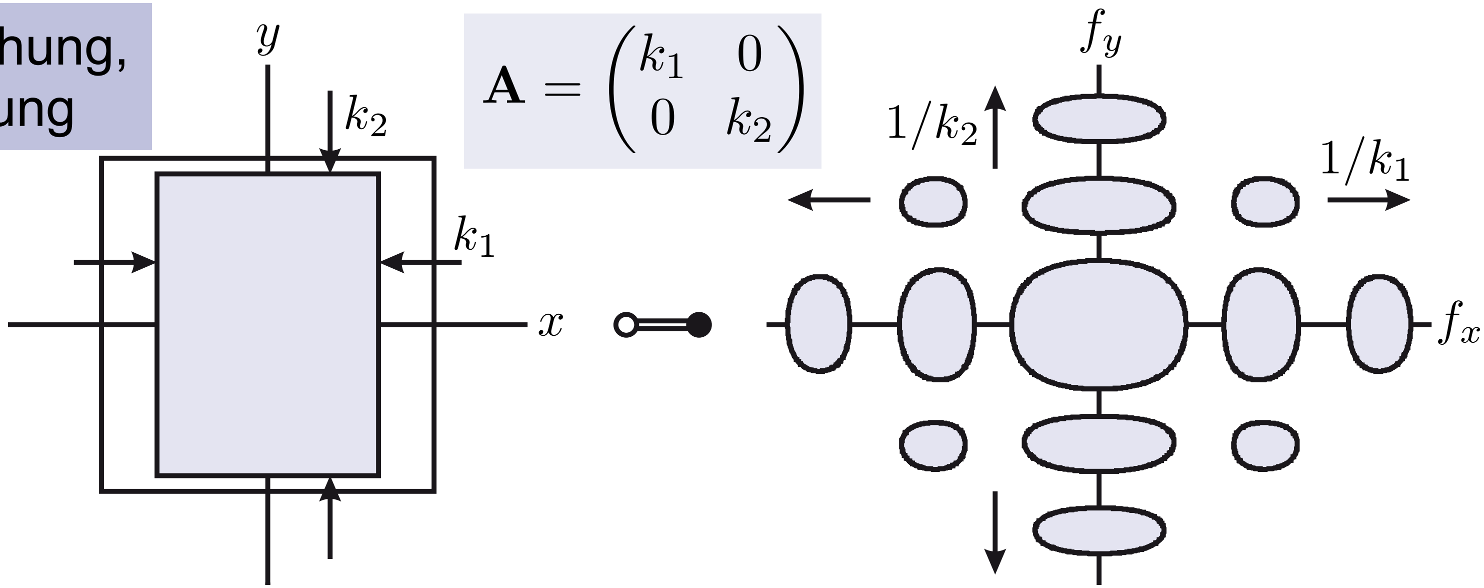


$\Rightarrow$ rotationssymmetrische Signale haben rotationssymmetrische Spektren

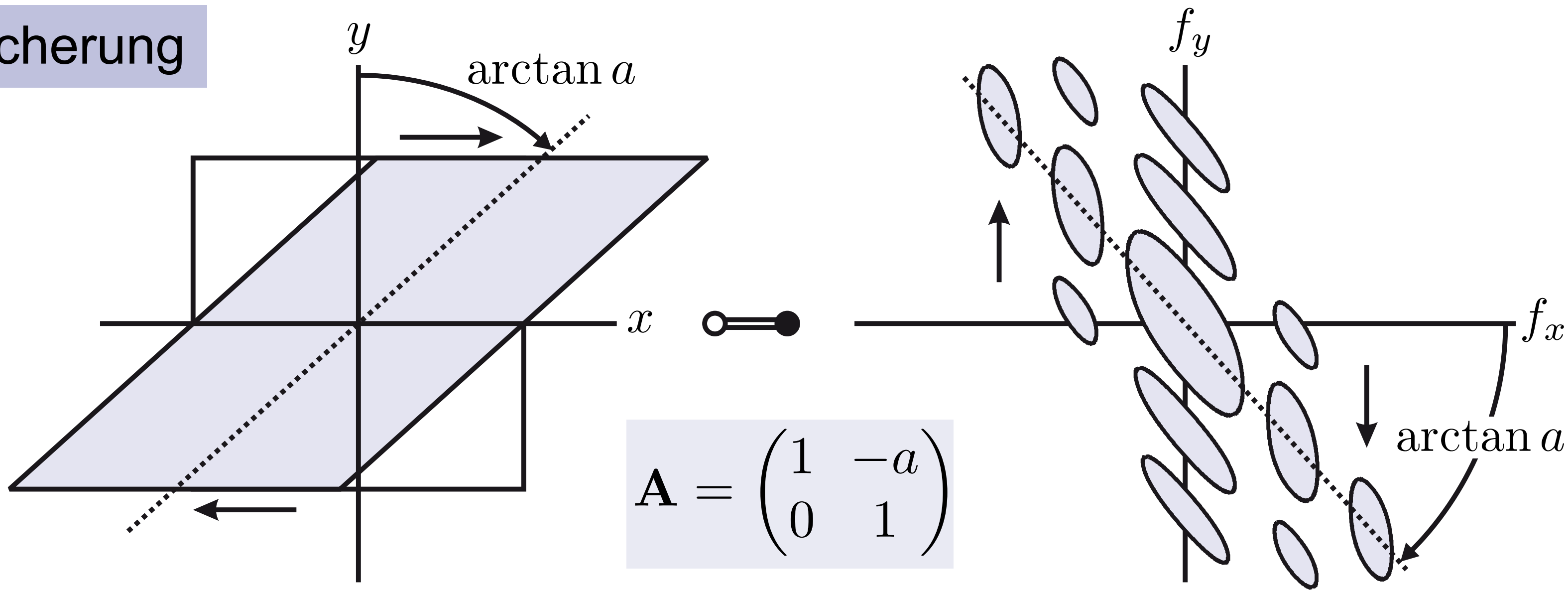
8.3.4 Die zweidimensionale Fourier-Transformation

Stauchung, Dehnung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$



Scherung



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

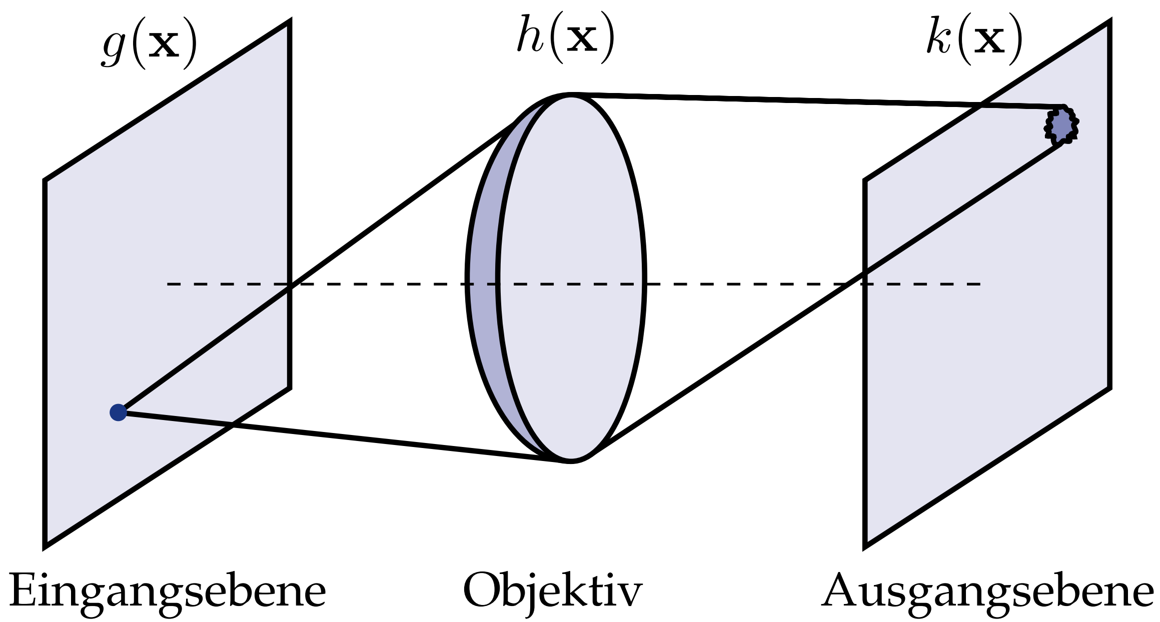
- **Faltungssatz**:

$$k(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) ** h(\mathbf{x}) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\alpha,\beta)\, h(x-\alpha, y-\beta)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$K(\mathbf{f}) = G(\mathbf{f}) \cdot H(\mathbf{f})$$

Bsp.: Abbildung mit einer Linse ≈ **LSI-System** (linear verschiebungsinvariant)



Systemtheoretische Beschreibung des Abbildungsvorganges

$h(\mathbf{x}) =$ Impulsantwort $=$ Antwort des Abbildungssystems auf $\delta(\mathbf{x})$

„**Punktverschmierungsfunktion**“ (PSF)

→ Definition

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$H(\mathbf{f}) =$ Übertragungsfunktion des Abbildungssystems

„**optische Übertragungsfunktion**“ (OTF)

- Diese Beschreibung umfasst auch den Fall der unscharfen Abbildung:

$$h(\mathbf{x}) = k \operatorname{rect}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\varepsilon}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$H(\mathbf{f}) = k\,\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{J_1(\pi\varepsilon\|\mathbf{f}\|)}{\|\mathbf{f}\|}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

8.3.5 Delta-Funktionen im Zweidimensionalen

„Messerfunktion“:

$$\delta(y) = \delta(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_y) = 1(x)\,\delta(y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f_x)\,1(f_y) = \delta(f_x) = \delta(\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_x)$$

- Anschaulich: $\delta(y) = \begin{cases} \infty & \text{für } y = 0\text{, d. h. auf der } x\text{-Achse} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

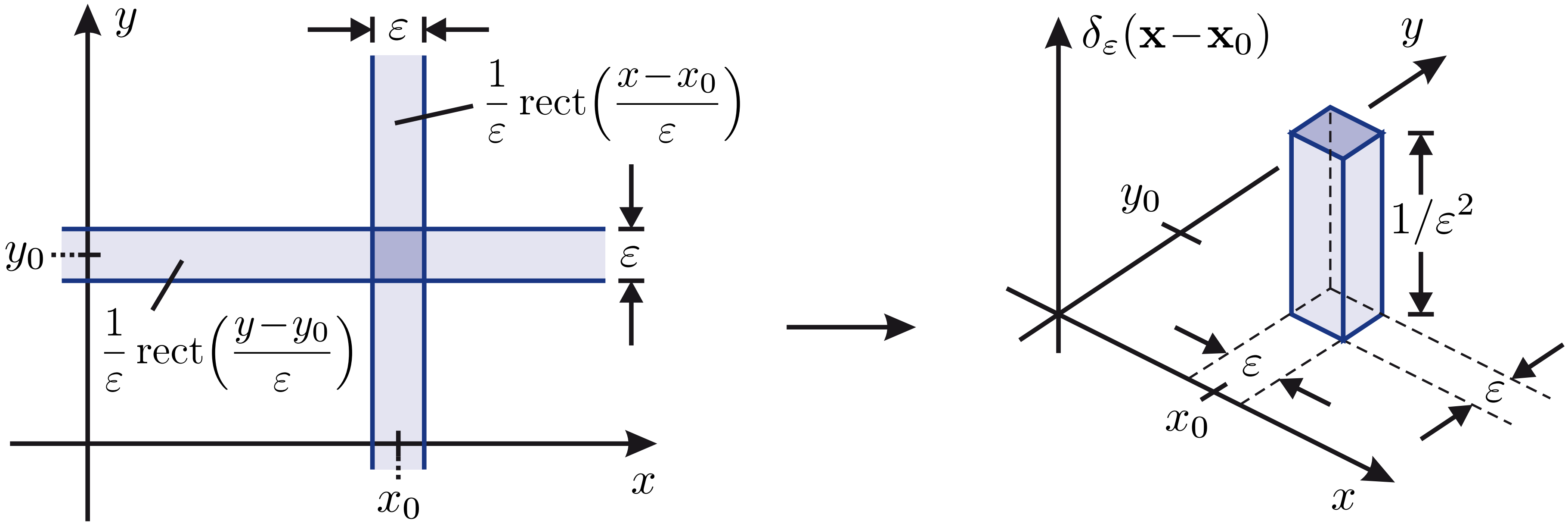
Zweidimensionaler δ-Impuls:

- Definition: $$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\, g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = g(\mathbf{x}_0)$$ $g(\mathbf{x})$ stetig in $\mathbf{x}_0$
- Approximation:

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y - y_0}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Produkt der Approximationen $\delta_\varepsilon(x)$ und $\delta_\varepsilon(y)$

8.3.5 Delta-Funktionen im Zweidimensionalen



- Es gilt:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\,\delta(y) \qquad \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$$

$$g(\mathbf{x}) ** \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

- Anschaulich:

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Institut für Industrielle Informationstechnik

Karlsruher Institut für Technologie

Mathematische Beschreibung

- Multiplikation des Bildes $g(\mathbf{x})$ mit einer 2D-Impulsfolge (Abtastraster) $r(\mathbf{x})$:

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - m\Delta x\, \mathbf{e}_x - n\Delta y\, \mathbf{e}_y) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y)\right]$$

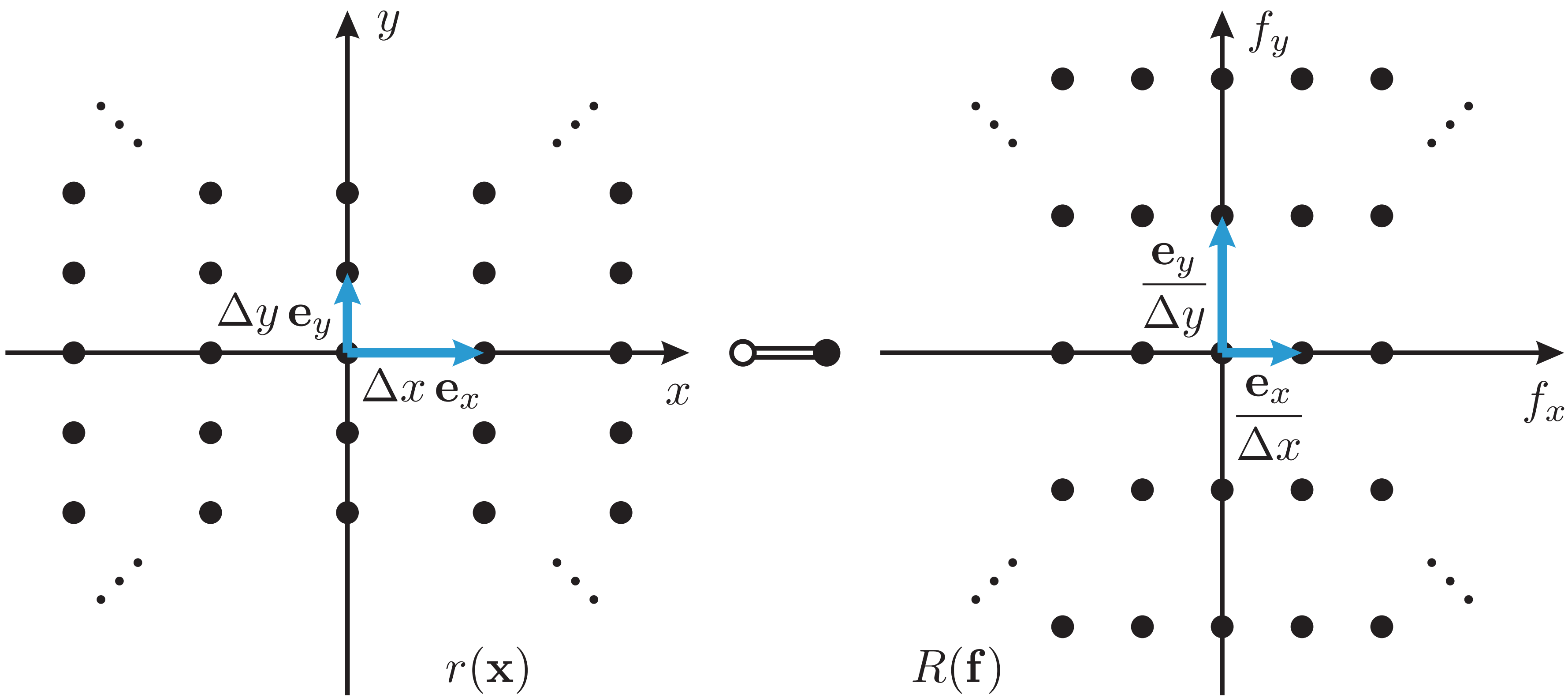
$\circ\!\!-\!\!\bullet$

Separationssatz: jeden der beiden Faktoren eindimensional Fourier-transformieren

$$R(\mathbf{f}) = \left[\frac{1}{\Delta x}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_x - \frac{k}{\Delta x}\right)\right]\left[\frac{1}{\Delta y}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_y - \frac{l}{\Delta y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x\, \Delta y}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mathbf{f} - \frac{k}{\Delta x}\mathbf{e}_x - \frac{l}{\Delta y}\mathbf{e}_y\right)$$

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale



- Abtastraster sind durch die „Gittervektoren“ $\Delta x\, \mathbf{e}_x$ und $\Delta y\, \mathbf{e}_y$ (oder durch $\mathbf{e}_x/\Delta x$, $\mathbf{e}_y/\Delta y$) eindeutig festgelegt
- Bis auf eine Translation lässt sich jedes regelmäßige Abtastraster durch lin. Koordinatentransformation aus dem achsparallelen Raster erzeugen

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} \delta(\mathbf{A}\mathbf{x} - m\Delta x\, \mathbf{e}_x - n\Delta y\, \mathbf{e}_y) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \propto \sum_{k,l} \delta\left(\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f} - k\frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x} - l\frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y}\right)$$

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Im Folgenden interessieren nur noch die Lokationen der δ-Impulse. Vorfaktoren werden unterdrückt.

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} \delta(\mathbf{A}(\mathbf{x} - m\underbrace{\Delta x\, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_x}_{=:\, \mathbf{b}_1} - n\underbrace{\Delta y\, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_y}_{=:\, \mathbf{b}_2}))$$

$$= \sum_{k,l} \delta\left(\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{f} - k\underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x}}_{=:\, \mathbf{w}_1} - l\underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y}}_{=:\, \mathbf{w}_2}\right)\right)$$

$$\tilde{r}(\mathbf{x}) \propto \sum_{m,n} \delta(\mathbf{x} - m\,\mathbf{b}_1 - n\,\mathbf{b}_2)$$

$$\tilde{R}(\mathbf{f}) \propto \sum_{k,l} \delta(\mathbf{f} - k\,\mathbf{w}_1 - l\,\mathbf{w}_2)$$

Gittervektoren im Ortsbereich

Gittervektoren im Frequenzbereich

Es gilt:

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_1 = \Delta x\, \mathbf{e}_x^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{I}\,:\ \text{Einheitsmatrix}} \frac{\mathbf{e}_x}{\Delta x} = 1 \qquad \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_2 = \Delta x\, \mathbf{e}_x^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{I}} \frac{\mathbf{e}_y}{\Delta y} = 0$$

$$\mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_2 = 1 \qquad \mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_1 = 0$$

Institut für Industrielle Informationstechnik

- In Matrixschreibweise:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)^{\mathrm{T}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1}} \qquad \boxed{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{w}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{-1}}$$

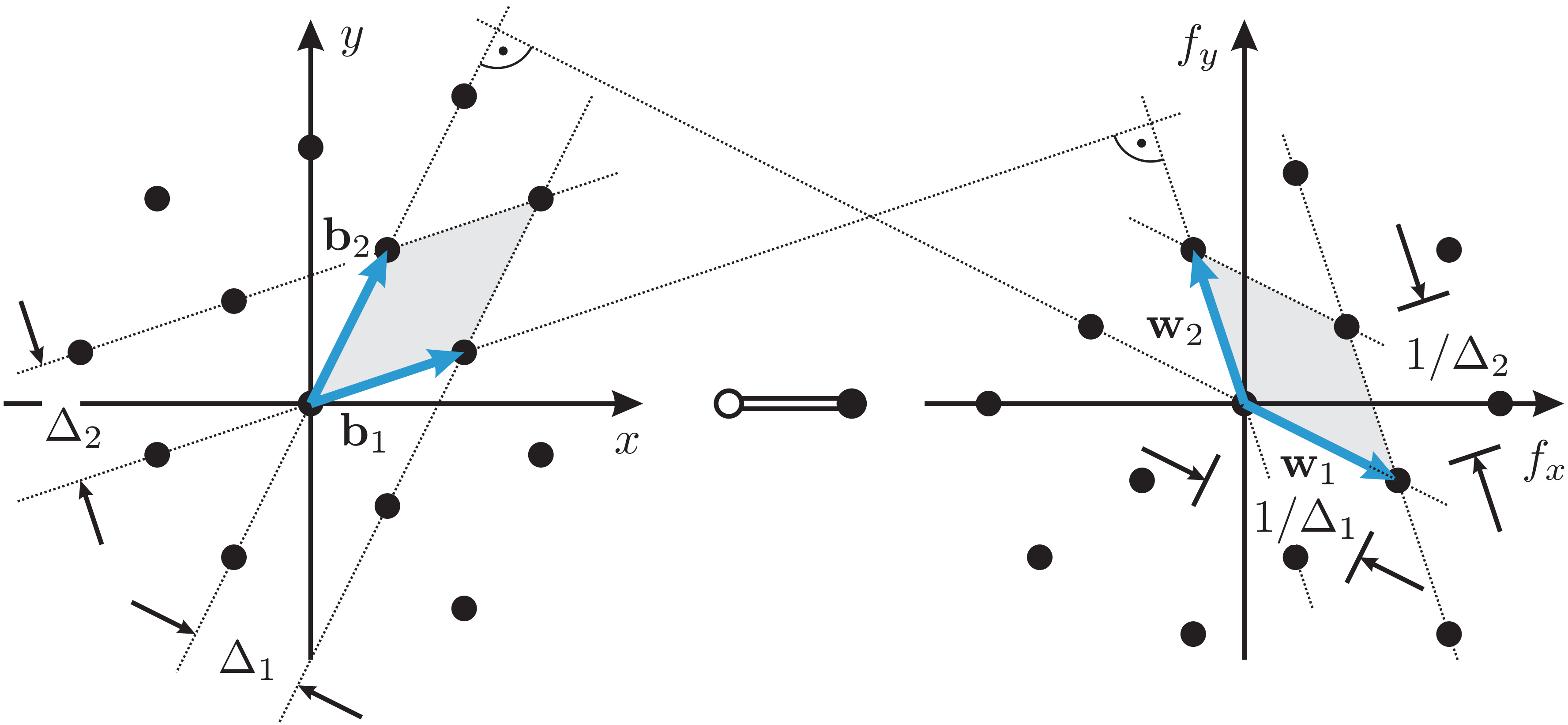
- Mit diesen Gleichungen kann aus einem Abtastraster das andere berechnet werden.

Reziprozität:

$$\boxed{\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)}}$$

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

- Die Fläche des durch $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ aufgespannten Parallelogramms ist reziprok zur Fläche des durch $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ aufgespannten Parallelogramms.



Basisvektoren zur Beschreibung eines schiefwinkligen Abtastrasters und seines Spektrums

8.3.6 Abtastung zweidimensionaler Signale

Abtastung:

$$g(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(\mathbf{f}) ** R(\mathbf{f})$$

abzutastendes Signal

Abtastraster

Mit diesem Raster wird $G(\mathbf{f})$ periodisch fortgesetzt. Jeder δ-Impuls von $R(\mathbf{f})$ reproduziert durch Faltung $G(\mathbf{f})$ an seiner Position.

$$g(m\,\mathbf{b}_1 + n\,\mathbf{b}_2) =: g_{mn}$$

8.3.7 Abtasttheorem für zweidimensionale Signale

- Sei $g(\mathbf{x})$ bandbegrenzt, d. h. es gibt ein beschränktes Gebiet $\Omega_G \subset \mathbb{R}^2$, so dass gilt: $G(\mathbf{f}) = 0$ für $\mathbf{f} \notin \Omega_G$. Das Signal $g(\mathbf{x})$ kann aus seinen auf einem regelmäßigen Abtastraster gewonnenen Abtastwerten g_{mn} **fehlerfrei** rekonstruiert werden, wenn bei der periodischen Fortsetzung keine Überlappungen entstehen.
- Ein **Interpolationsfilter** zur Rekonstruktion:

$$i_{\Omega_G}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{I_{\Omega_G}(\mathbf{f})\} \qquad I_{\Omega_G}(\mathbf{f}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{f} \in \Omega_G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abtastung:

$$g(\mathbf{x})\, r(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} g(m\,\mathbf{b}_1 + n\,\mathbf{b}_2)\,\delta(\mathbf{x} - m\,\mathbf{b}_1 - n\,\mathbf{b}_2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \propto \sum_{k,l} G(\mathbf{f} - k\,\mathbf{w}_1 - l\,\mathbf{w}_2)$$

Rekonstruktion:

$$\downarrow ** \, i_{\Omega_G}(\mathbf{x}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \downarrow \cdot I_{\Omega_G}(\mathbf{f})$$

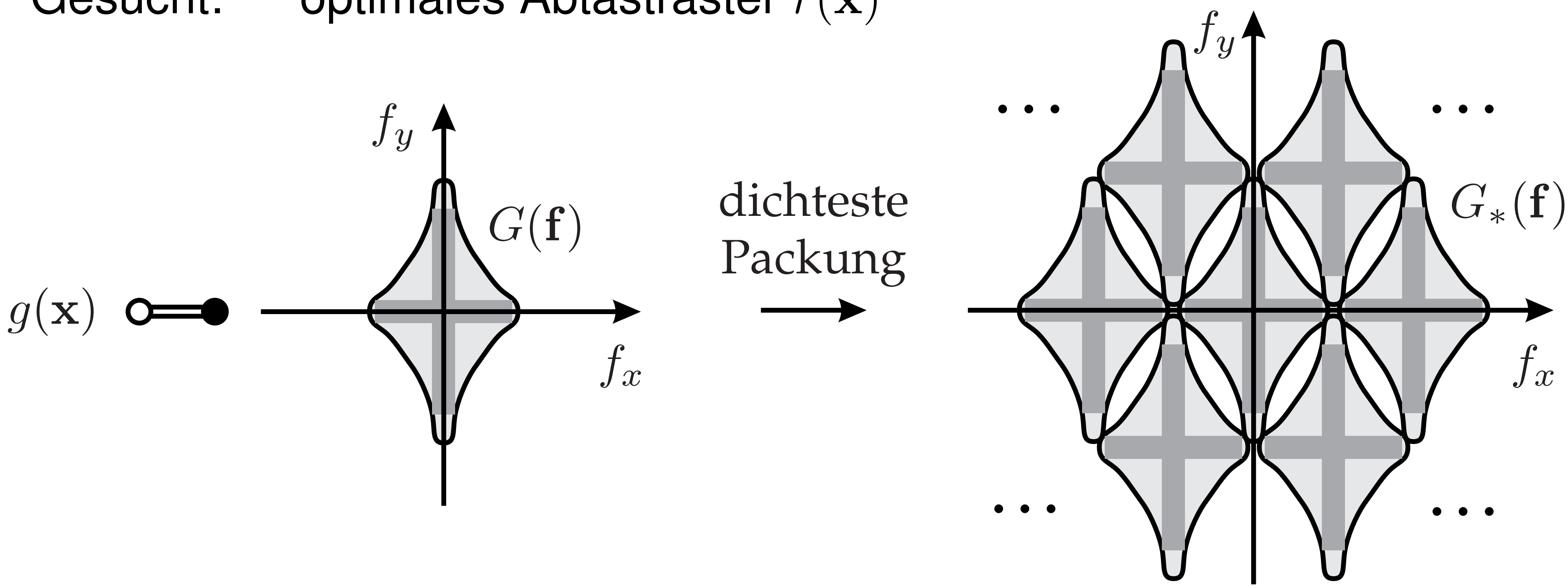
$$g(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} g_{mn}\, i_{\Omega_G}(\mathbf{x} - m\,\mathbf{b}_1 - n\,\mathbf{b}_2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(\mathbf{f})$$

Optimale Abtastung

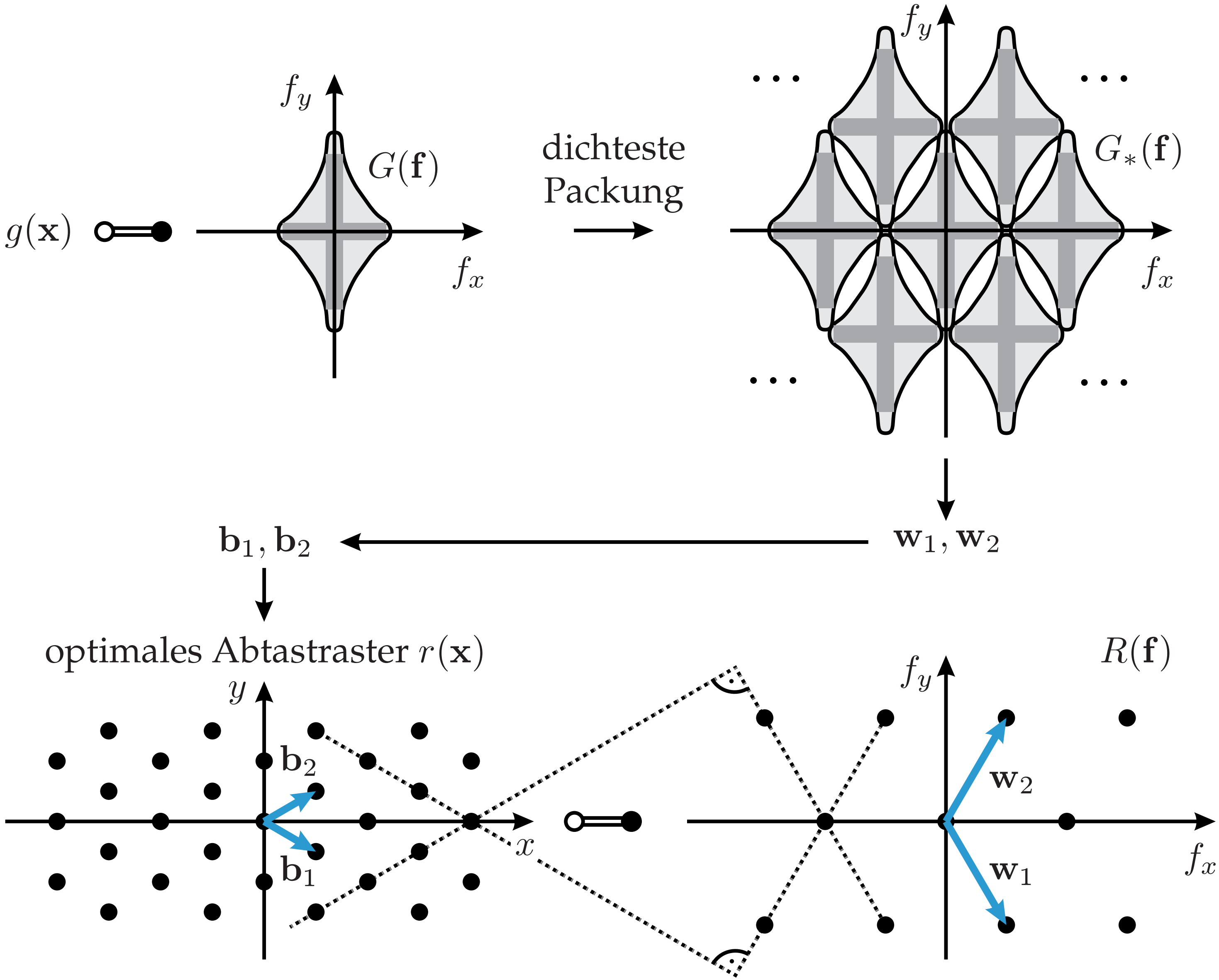
- Dichteste Packung der Spektren $G(\mathbf{f} - m\mathbf{w}_1 - n\mathbf{w}_2)$ im Frequenzbereich entspricht der gröbsten zulässigen Abtastung von $g(\mathbf{x})$ im Ortsbereich

Beispiel: Optimale Abtastung

- Gegeben: $g(\mathbf{x})$
- Gesucht: optimales Abtastraster $r(\mathbf{x})$



8.3.7 Abtasttheorem für zweidimensionale Signale



Karlsruher Institut für Technologie

Definition:

$$G_{kl} := \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{nl}{N}} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{mk}{M}} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

$$g_{mn} = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{kl}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

- 2D-DFT setzt implizit g_{mn} und G_{kl} in beide Koordinatenrichtungen **periodisch** fort

- Zusammenhang $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$ mit Indizes m, n, k, l:

$$\mathbf{x} = (m\,\Delta x, n\,\Delta y)^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{f} = \left(\frac{k}{M\,\Delta x}, \frac{l}{N\,\Delta y} \right)^{\mathrm{T}}$$

8.3.8 Die zweidimensionale DFT

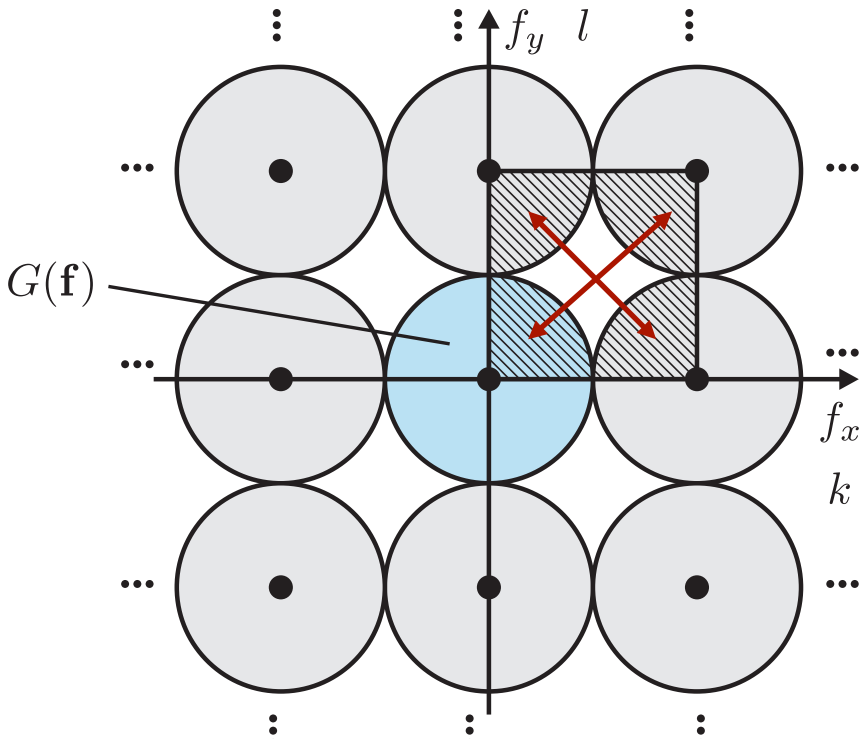
- Berechnung: zeilen- und anschließend spaltenweise 1D-DFT oder umgekehrt!

Aufwand:

- direkte Berechnung: M^2N^2 komplexe Multiplikationen und Additionen
- mit 1D-FFT: $MN(\log_2 M + \log_2 N)$ kompl. Mult. und Additionen

„Fenster“ der DFT

- periodische Fortsetzung des Spektrums G_{kl}
- „Fenster“ (DFT-Ausschnitt): ungewohnte Anordnung der Frequenzen
- gewohnte Anordnung durch Überkreuzvertauschung der vier Quadranten des DFT-Fensters
- gleicher Sachverhalt gilt auch im Ortsbereich!

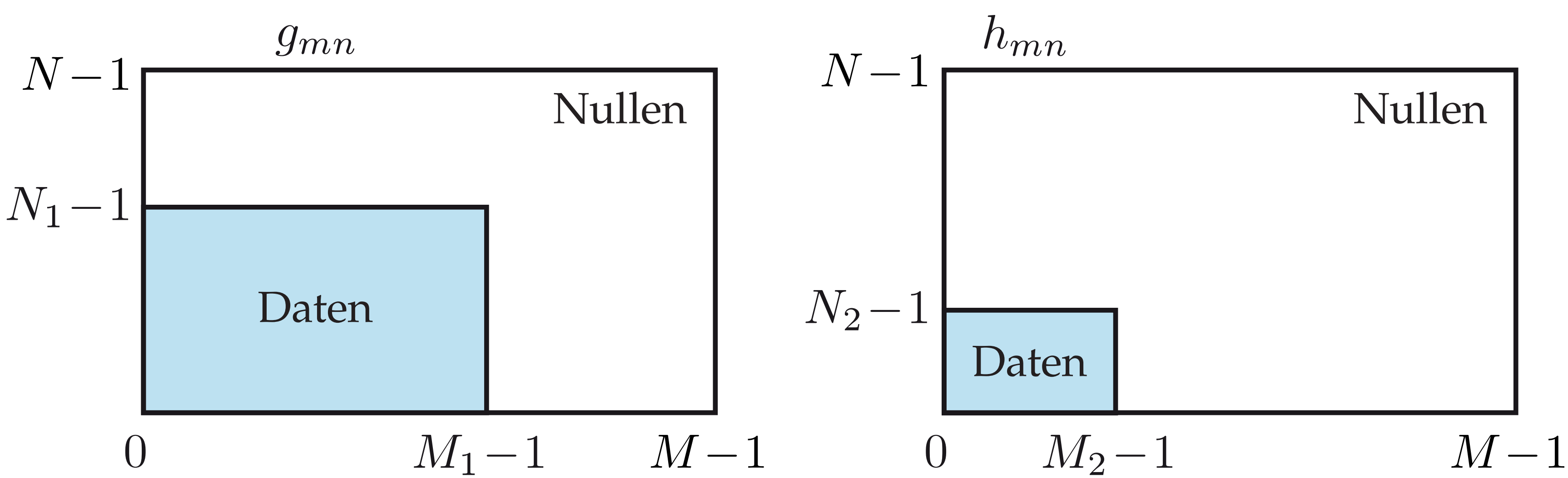


Faltungstheorem:

$$\mathrm{DFT}^{-1}\{G_{kl} \cdot H_{kl}\} = g_{mn} ** h_{mn} = \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} g_{\mu,\nu}\, h_{(m-\mu) \bmod M,\, (n-\nu) \bmod N}$$

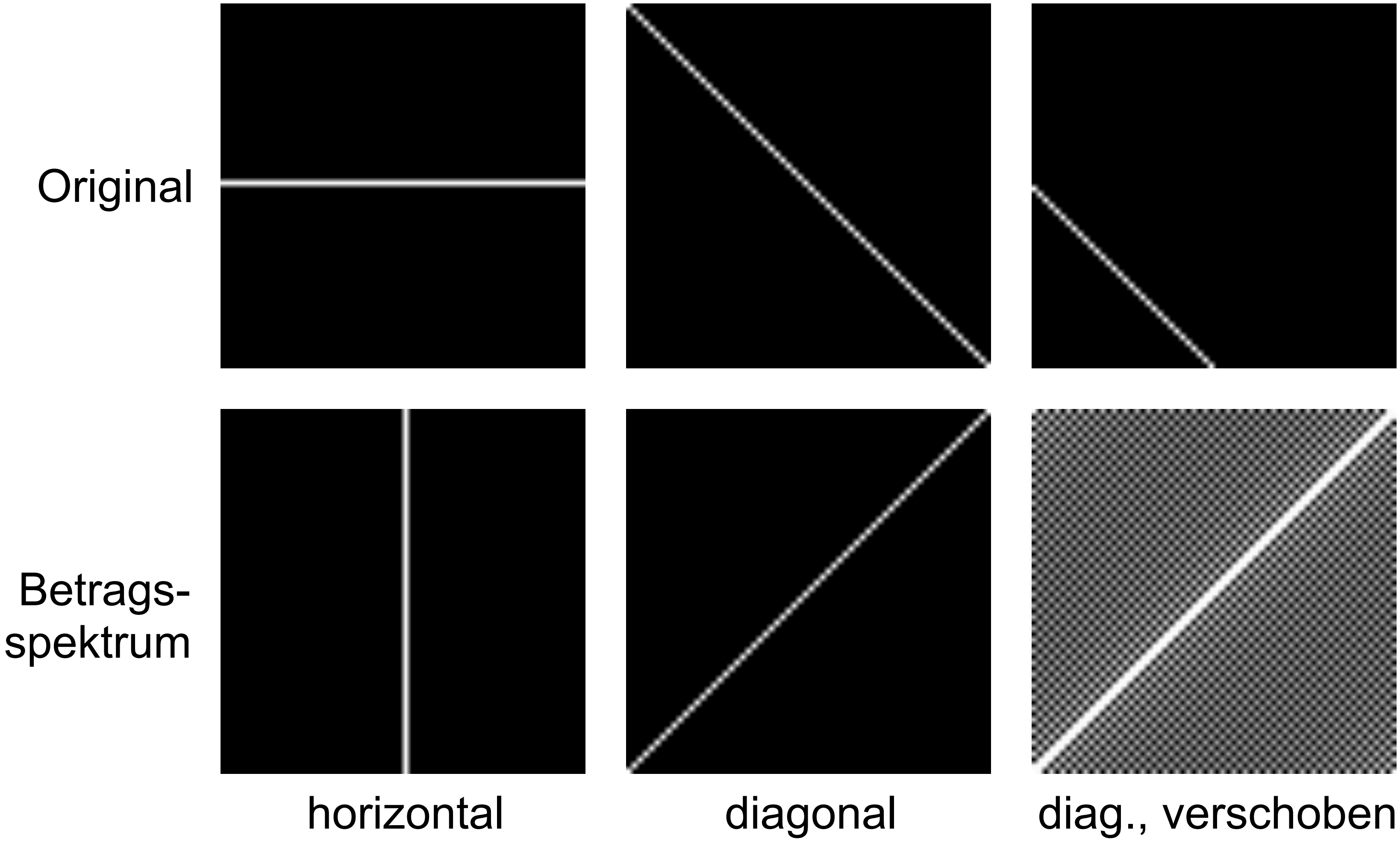
zyklische Faltung

- Vermeidung des Randeffektes durch *zero padding* in beiden Dimensionen



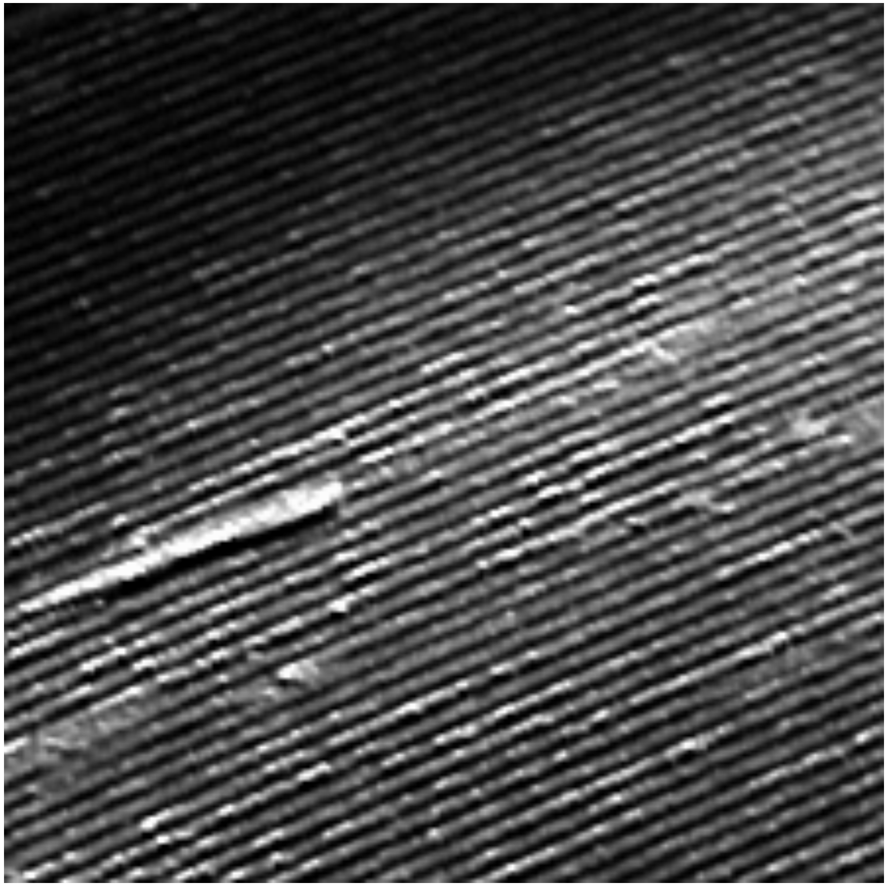
Beispiele 8.15/8.16: DFT einer horizontalen bzw. diagonalen Linie

- Spektren sind Dirac-Geraden senkrecht zur ursprünglichen Linie

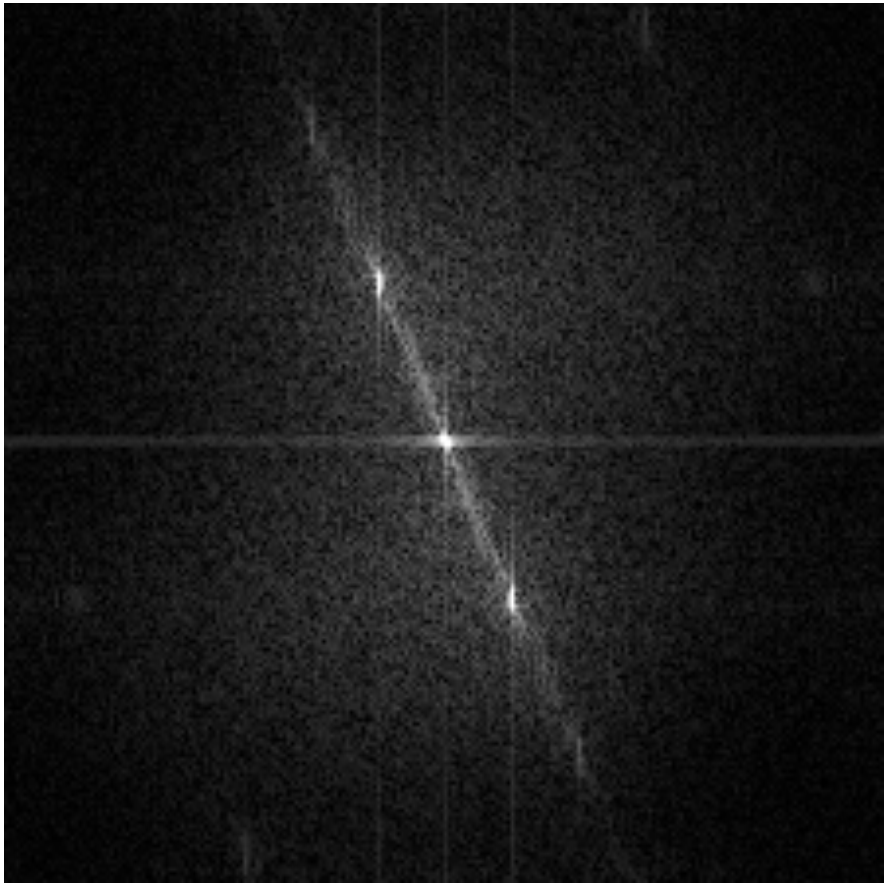


Beispiel 8.17: DFT einer periodischen Riefentextur

- Leckeffekt ist deutlich zu sehen

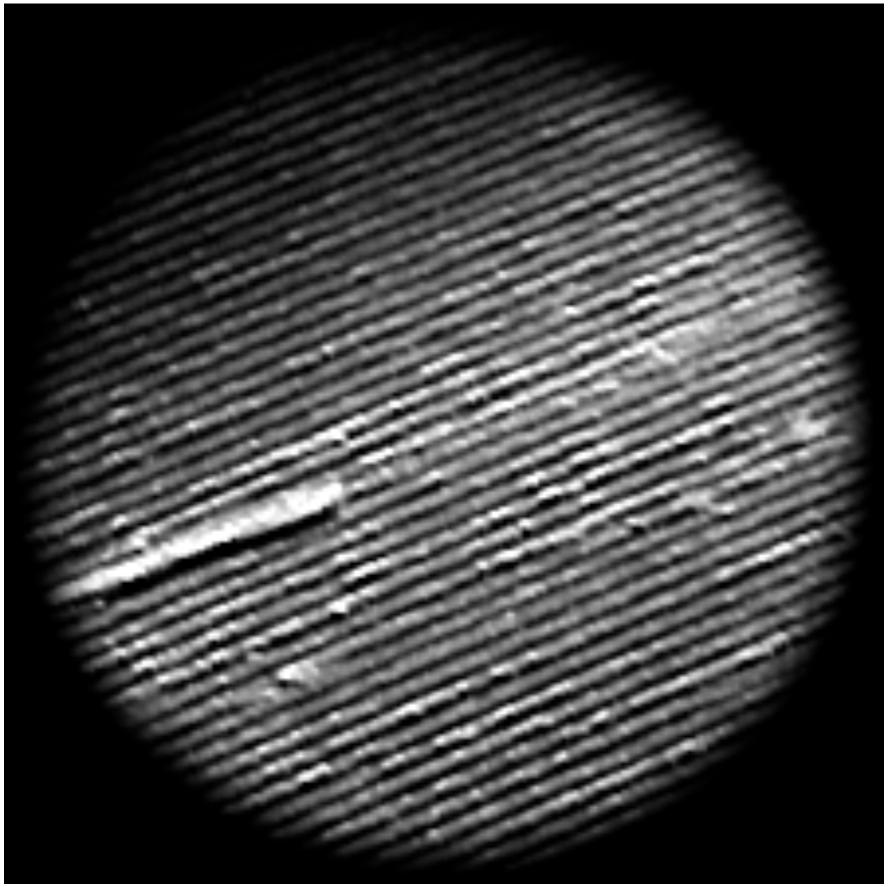


Stoßtextur g_{mn}

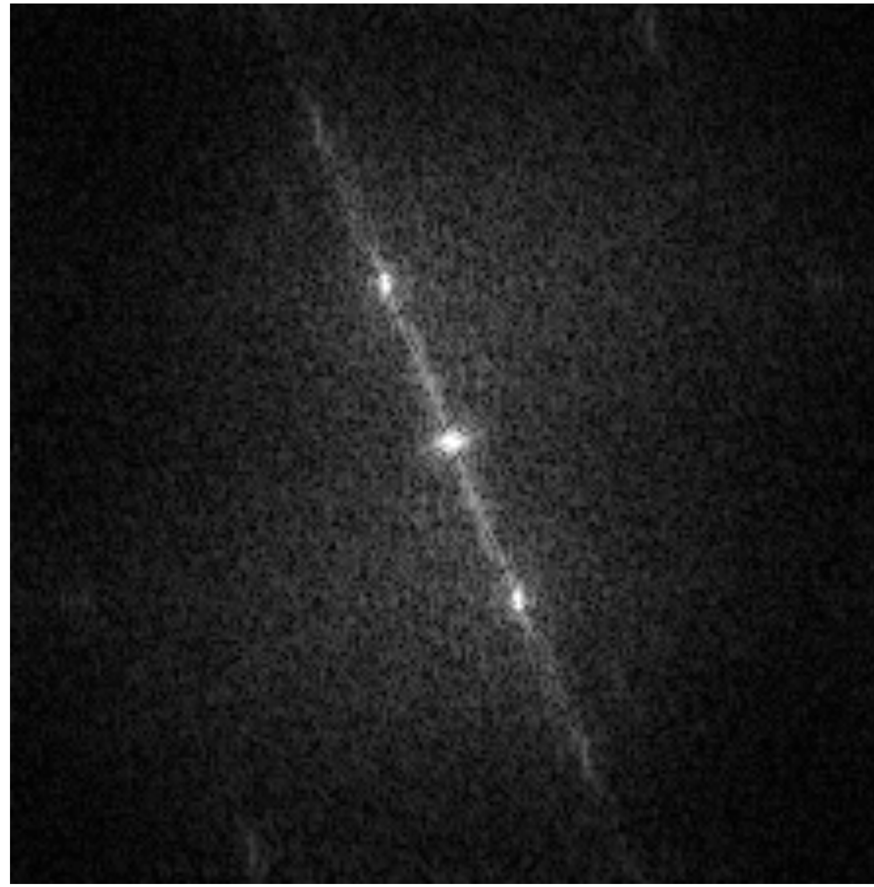


$\log(1 + |\mathrm{DFT}\{g_{mn}\}|)$

- Verringerung des Leckeffekts durch Multiplikation mit Hann-Fenster



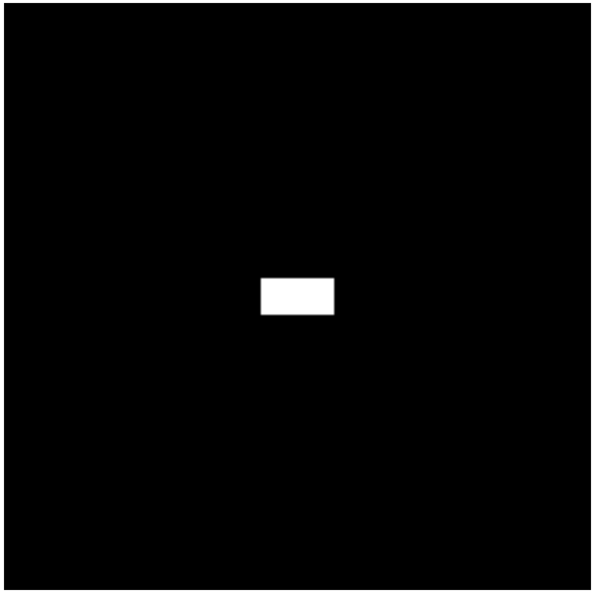
$g_{mn} \cdot w_{mn}$



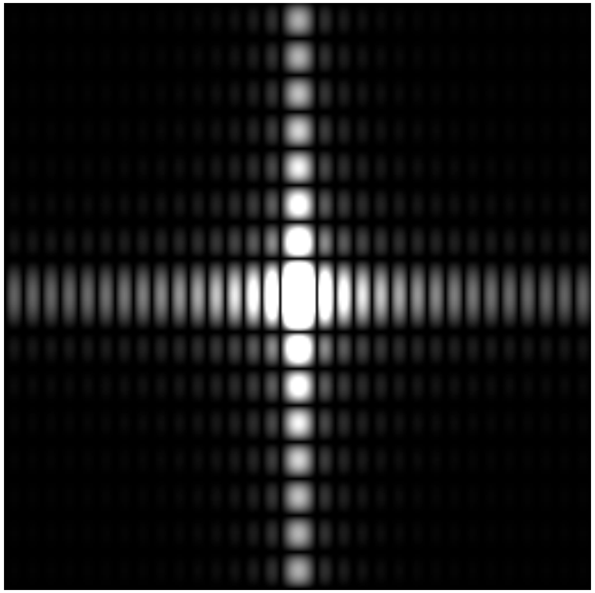
$\log(1 + |\mathrm{DFT}\{g_{mn} \cdot w_{mn}\}|)$

Beispiel 8.18: DFT eines Rechtecks

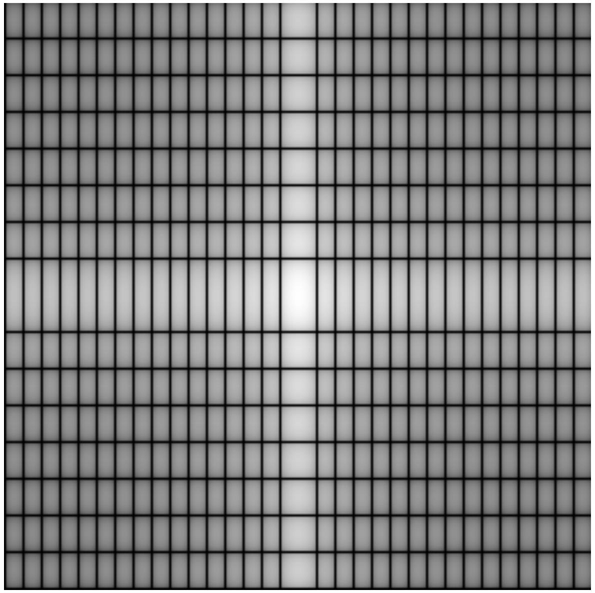
- Signal entspricht Produkt zweier Rechteckfunktionen
- Spektrum entspricht Produkt zweier Sinc-Funktionen



g_{mn}



$|\mathrm{DFT}\{g_{mn}\}|$

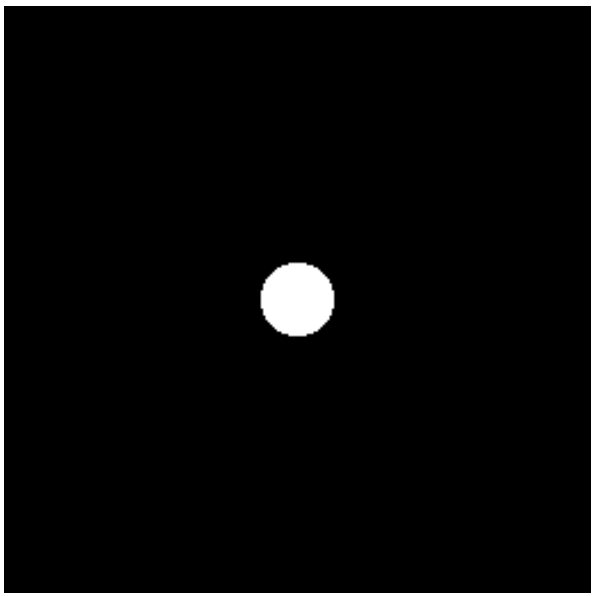


$\log(1 + |\mathrm{DFT}\{g_{mn}\}|)$

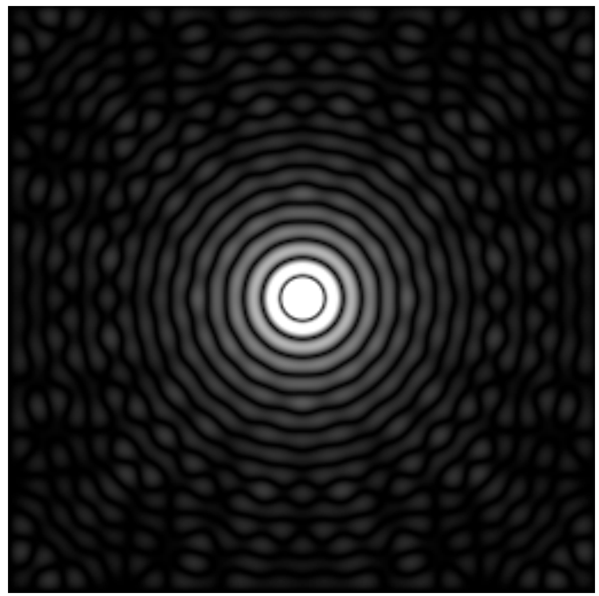
8.3.8 Die zweidimensionale DFT

Beispiel 8.19: DFT einer Kreisscheibe

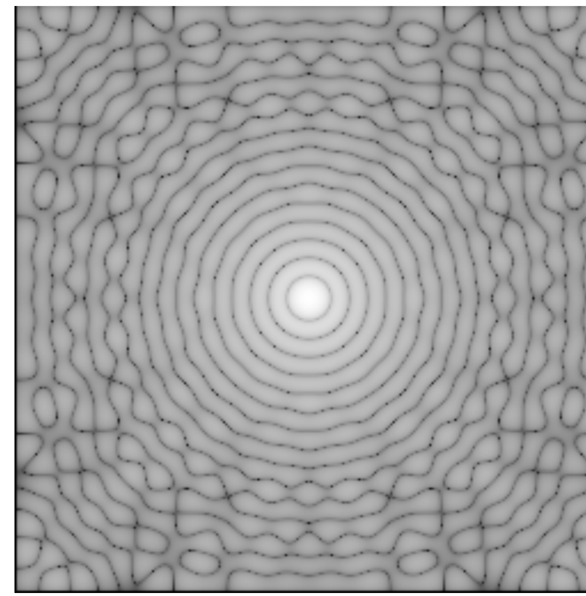
- Wegen der Ortsdiskretisierung bilden Nullstellen keine perfekten konzentrischen Kreise mehr



g_{mn}



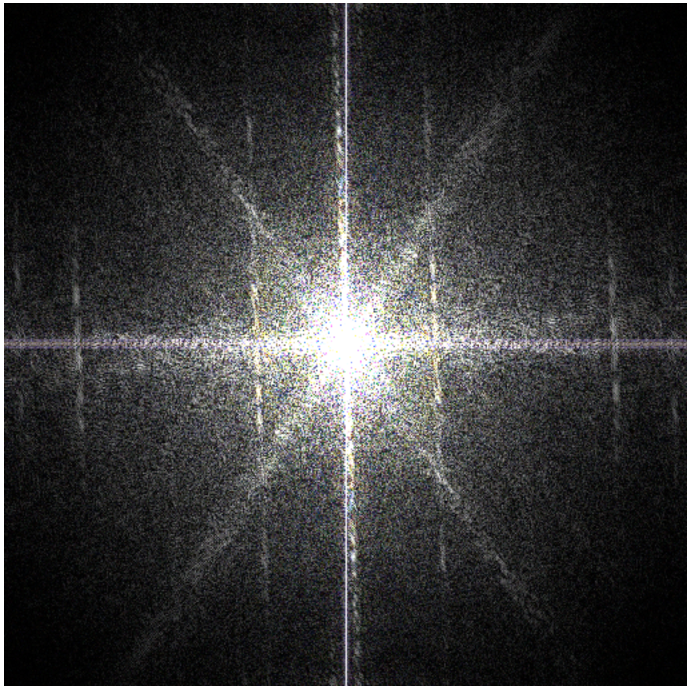
$|\mathrm{DFT}\{g_{mn}\}|$

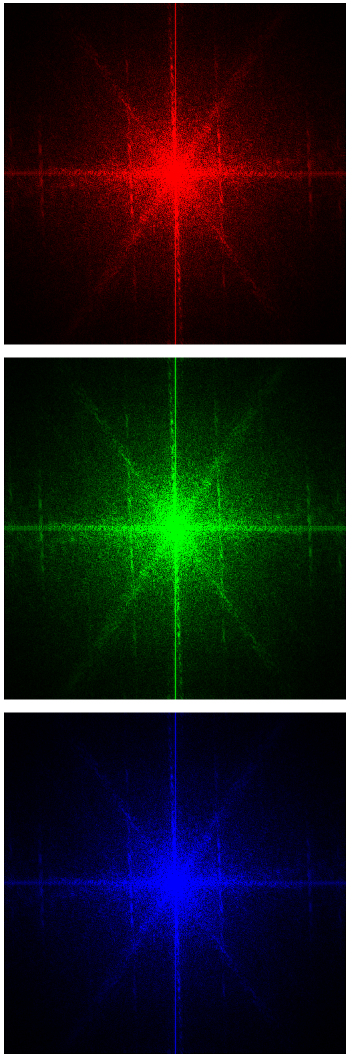


$\log(1 + |\mathrm{DFT}\{g_{mn}\}|)$

Beispiel 8.21: DFT eines Farbluftbildes

- Farbkanäle wurden getrennt einer DFT unterzogen
- Ergebnis erneut als Farbbild dargestellt

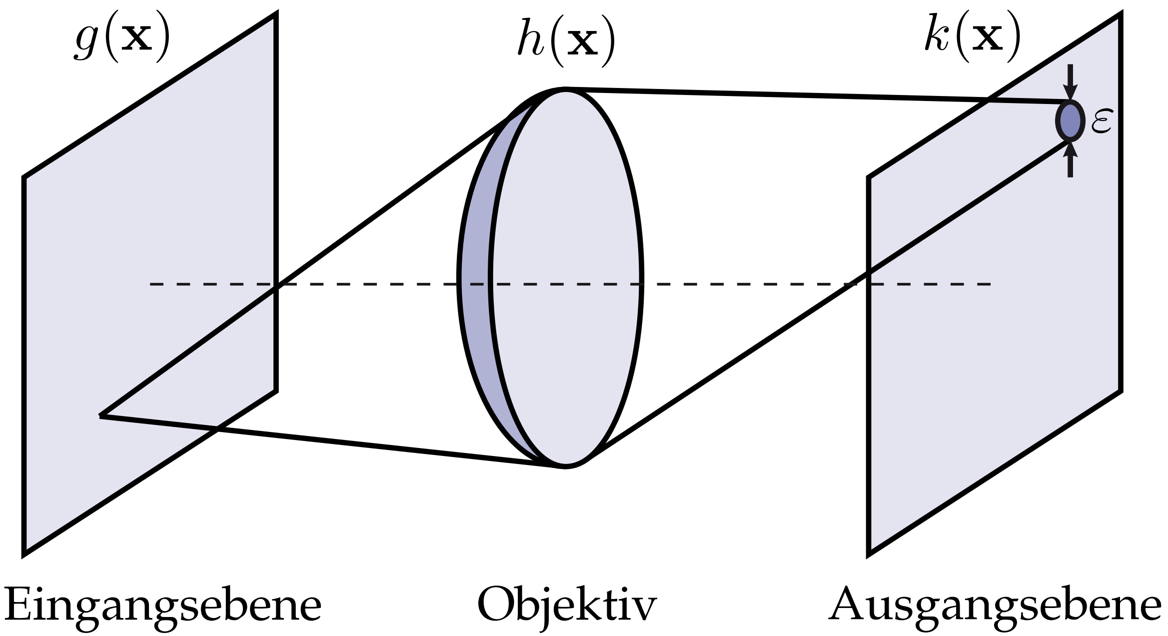




Beispiel 8.23: Unscharfe optische Abbildung

- Oberfläche sei um Δg außer Fokus

➡ Oberflächenpunkt $\rightarrow$ Unschärfekreis in Bildebene, $\varnothing : \varepsilon = \varepsilon(\Delta g)$



Inkohärentes Licht:

- $g(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$ sind Intensitäten (Leistung pro Fläche)
- Intensitäten überlagern sich additiv

Institut für Industrielle Informationstechnik

- Ausgangsbild:

$$g(\mathbf{x}) ** h(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) \quad ○\!\!-\!\!\!\bullet \quad G(\mathbf{f})\, H(\mathbf{f}) = K(\mathbf{f})$$

- Impulsantwort:

$$h(\mathbf{x}) \approx \frac{4}{\pi\varepsilon^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\varepsilon}\right) \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \iint\limits_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$$

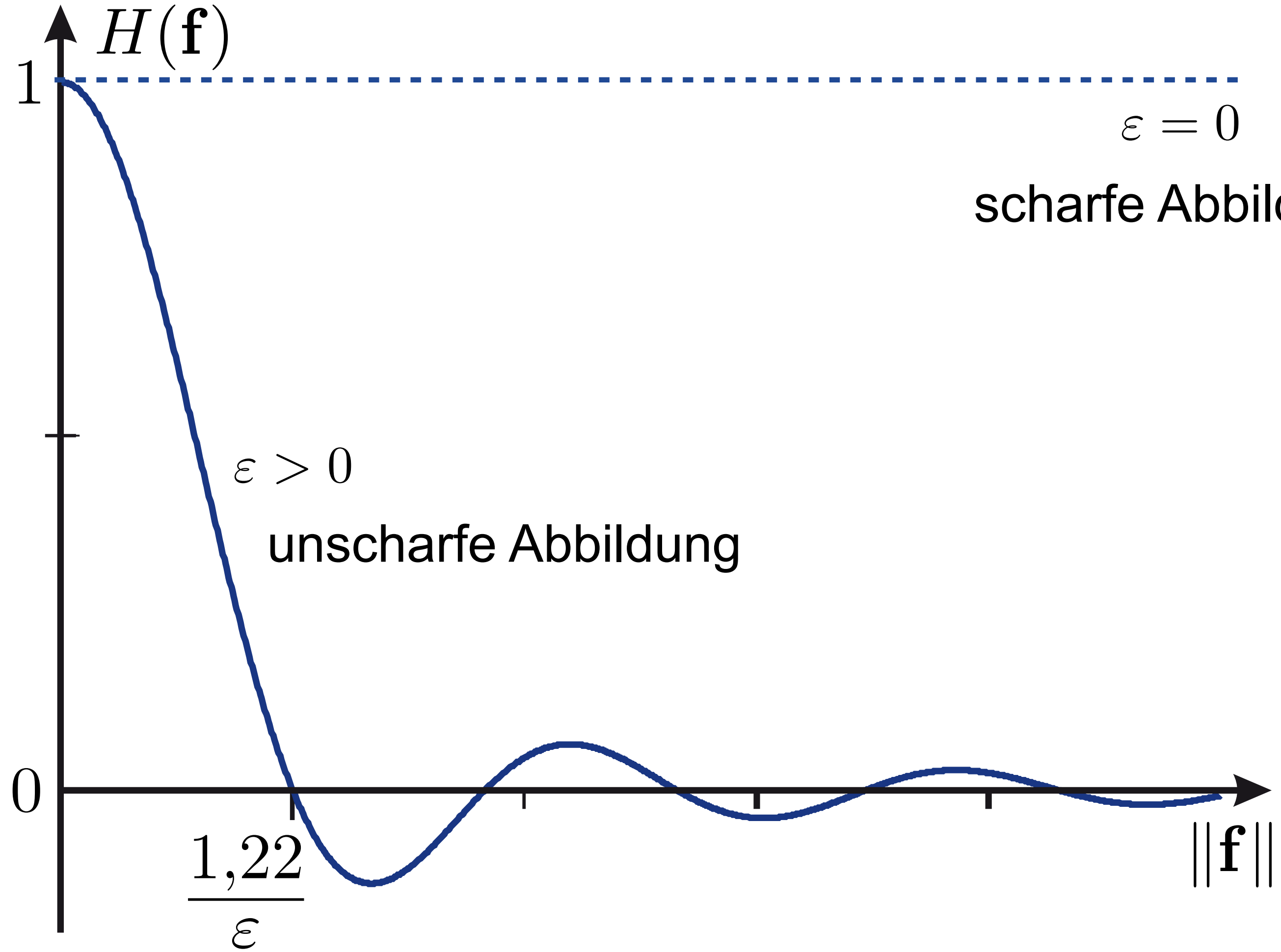
positiv, verlustfrei

- Übertragungsfunktion:

$$H(\mathbf{f}) = \frac{2}{\pi\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{J}_1(\pi\varepsilon\|\mathbf{f}\|)}{\|\mathbf{f}\|} \qquad \text{rotationssymmetrisch}$$

$\mathrm{J}_1(\cdot)$: Bessel-Funktion 1. Art, 1. Ordnung

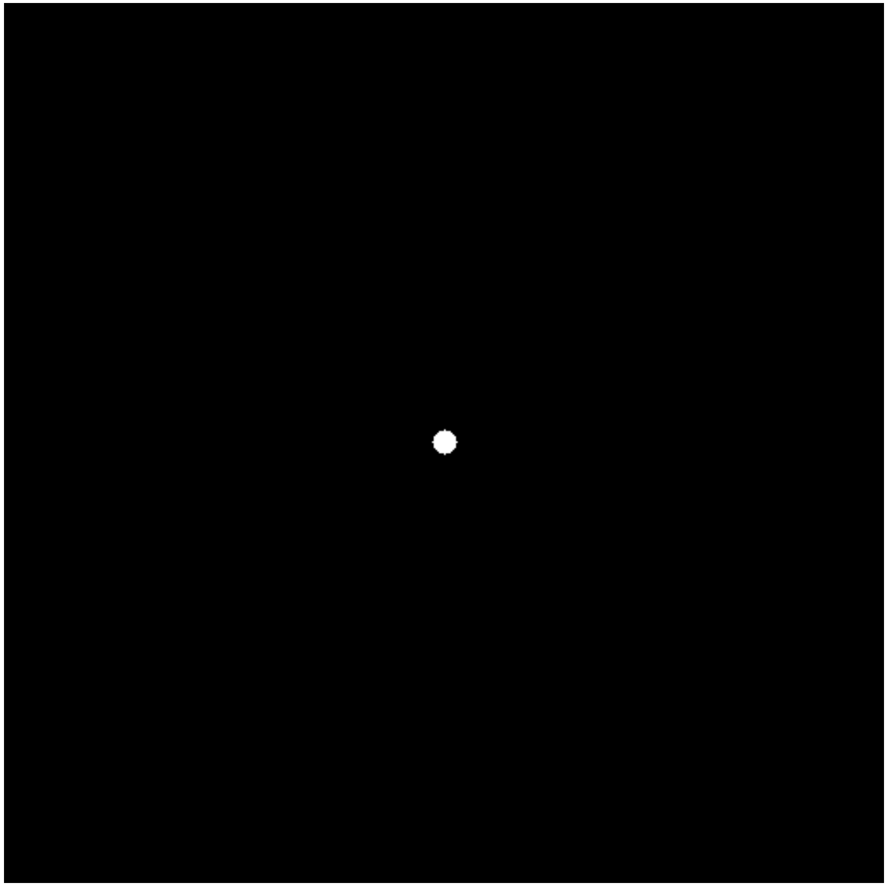
Unscharfe optische Abbildung hat Tiefpasscharakter
$\rightarrow$ kann z. B. als Anti-Aliasing-Filter verwendet werden



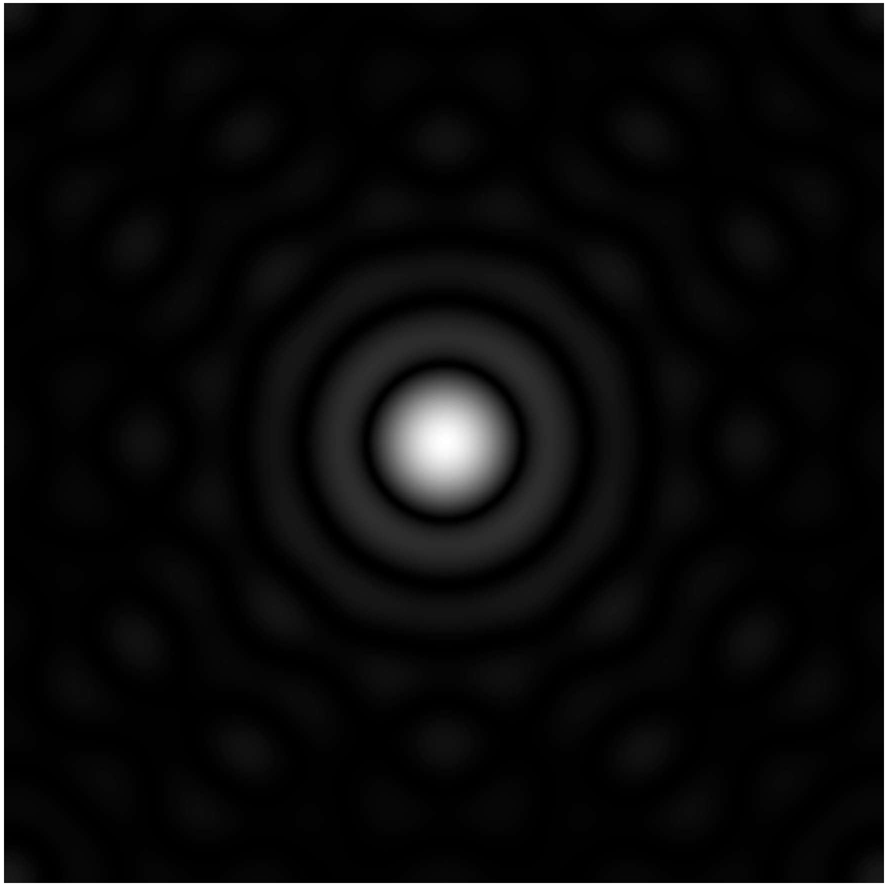
Übertragungsverhalten der optischen Abbildung

Institut für Industrielle Informationstechnik

Unscharfe optische Abbildung: Unscharfe Abbildung eines Punktes

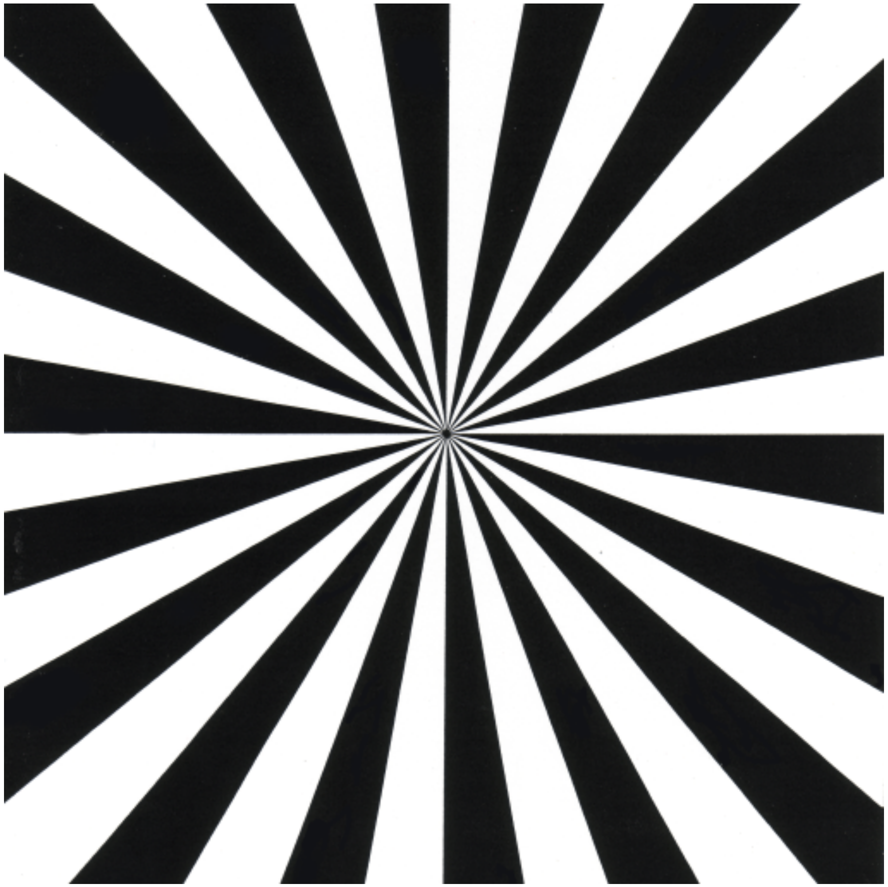


Unschärfescheibchen

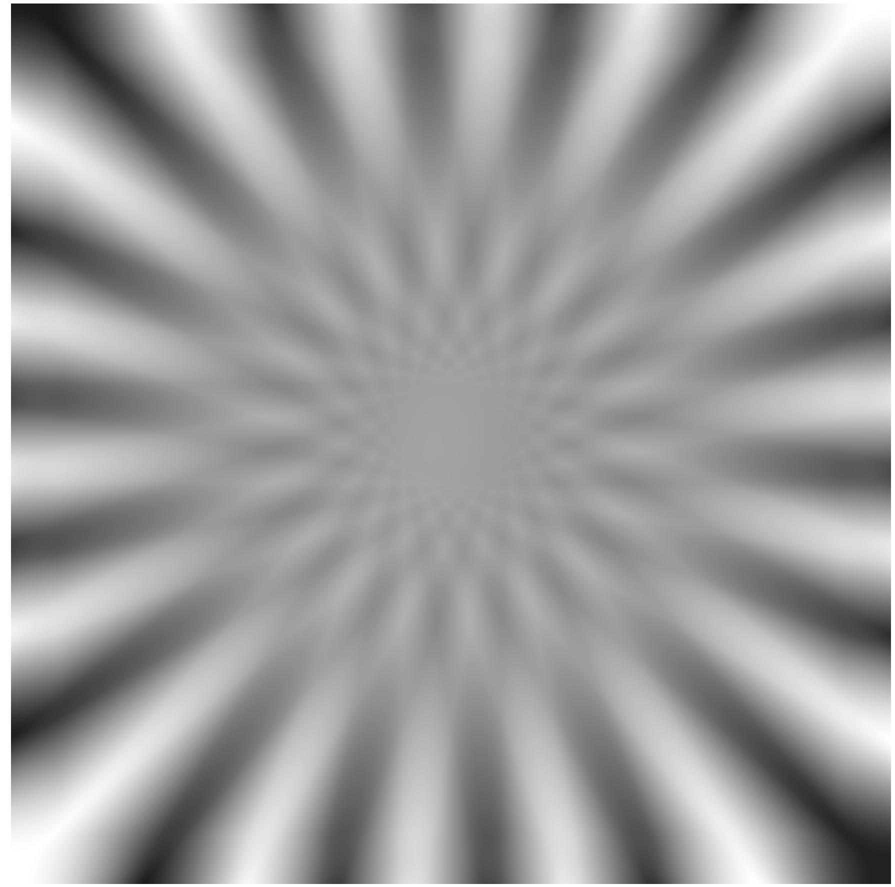


DFT-Betragsspektrum

Unscharfe optische Abbildung: Auswirkung der negativen Werte von $H(\mathbf{f})$

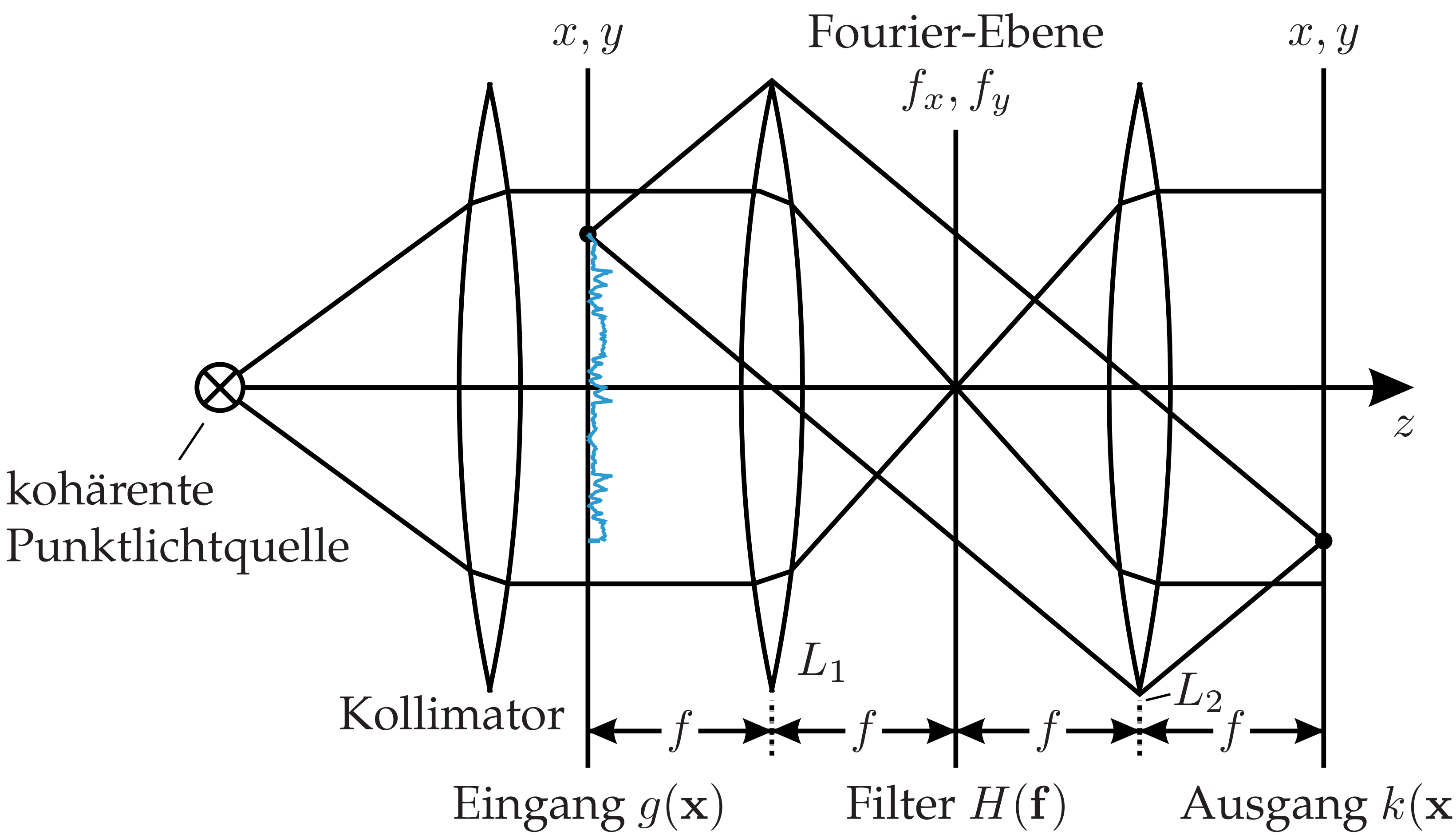


Siemens-Stern



Unscharfe Abbildung (simuliert)

Beispiel 8.24: Kohärent-optische Bildfilterung



$g(\mathbf{x}), k(\mathbf{x})$: elektrische Felder

$$\left.\begin{array}{ll} L_1: & \boxed{g(\mathbf{x}) \rightarrow G(\mathbf{f})} \\[2em] L_2: & \boxed{G(\mathbf{f}) \cdot H(\mathbf{f}) = K(\mathbf{f}) \rightarrow k(\mathbf{x})} \end{array}\right\} \text{Filterung in Echtzeit}$$

- optische Realisierung der 2D kontinuierlichen Fourier-Transformation

Zur Plausibilität:

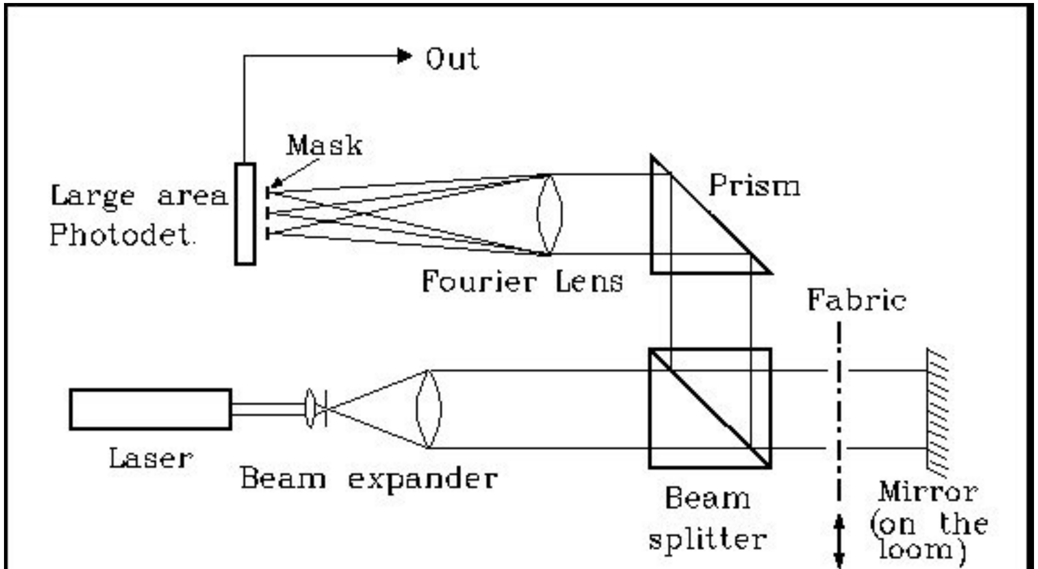
(1) $g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$: Lichtpunkt im Fokus von L_1

$\rightarrow$ Fourier-Ebene konstant beleuchtet: $G(\mathbf{f}) \equiv 1$

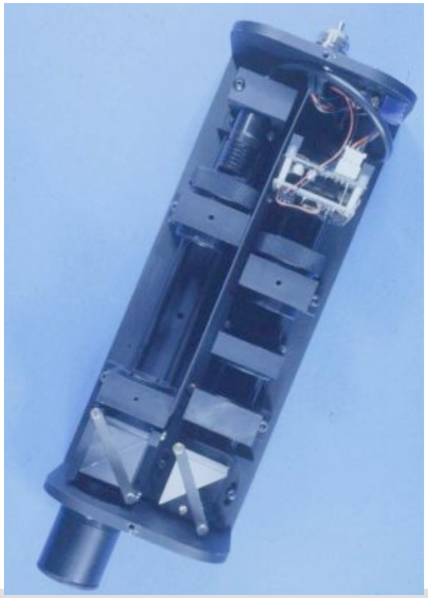
(2) $g(\mathbf{x}) \equiv c$: gleichmäßige Helligkeit

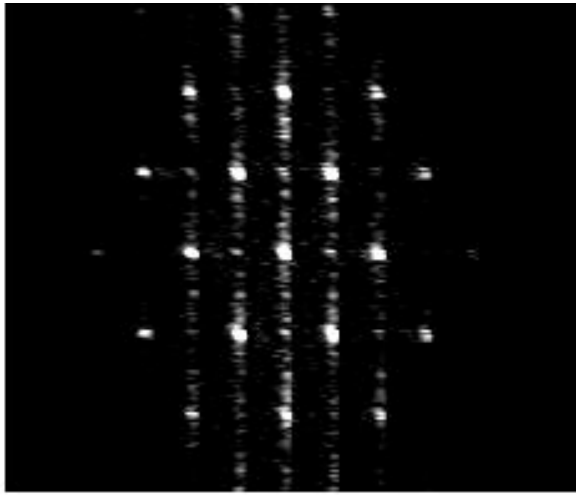
$\rightarrow$ parallele Strahlen der Beleuchtung werden von L_1 fokussiert: $G(\mathbf{f}) = c\,\delta(\mathbf{f})$

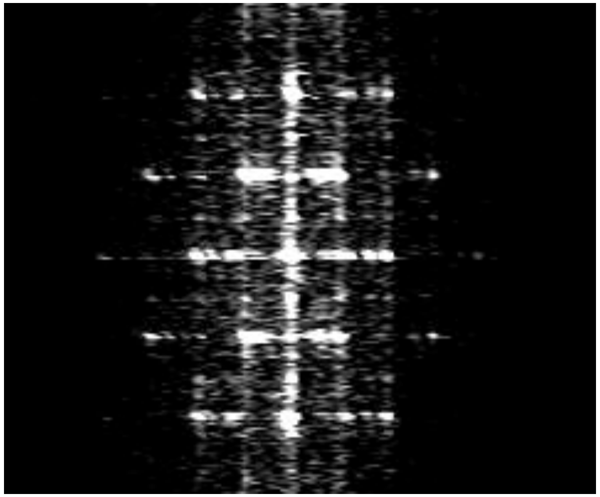
Institut für Industrielle Informationstechnik



Quelle: http://www.inoa.it/home/paola/ps_odile.htm

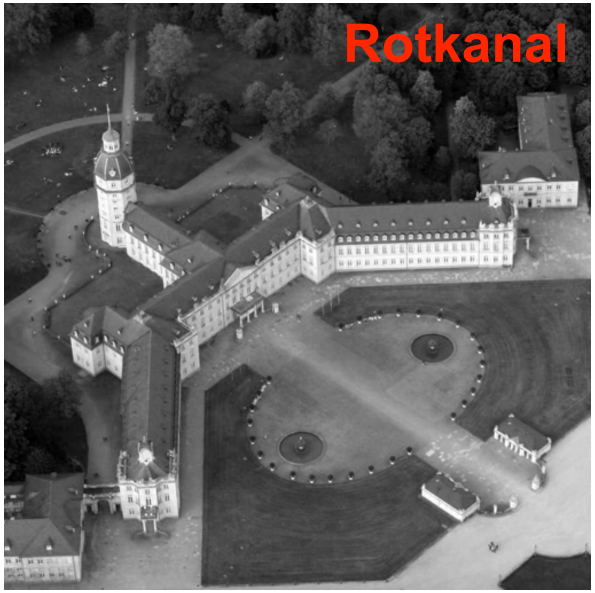


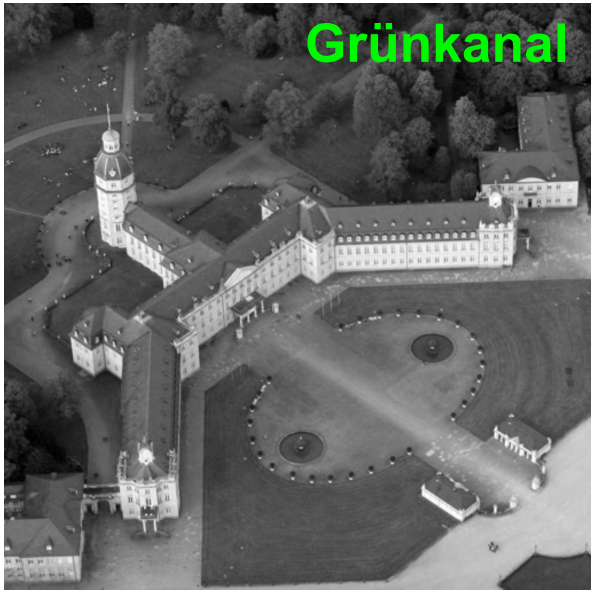

OFT: defektfreie Textur

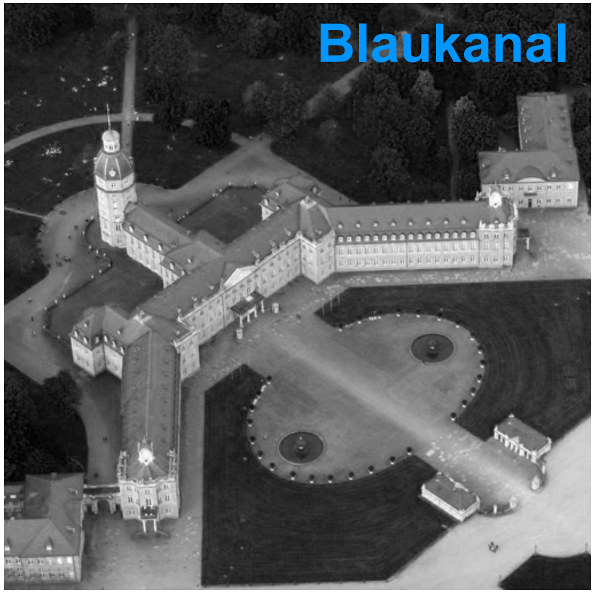

OFT: defekte Textur

Karhunen-Loève-Transformation (Hauptachsentransformation)

- Kanäle von Bildserien, Multispektralbildern, RGB-Bildern i. d. R. korreliert:
  $\mathrm{g}(\mathbf{x})$: **vektorwertiges Bild**







Ziele

- Dekorrelation
- Fusion
- Kompression

Bildintensitäten werden durch den Zufallsvektor $\mathbf{g}$ beschrieben

8.7 Karhunen-Loève-Transformation

- Mittelwert des Wertevektors:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}} = \mathrm{E}\{\mathbf{g}\}$$

- Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{gg}} = \mathrm{E}\left\{(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^{\mathrm{T}}\right\}$$

$\mathbf{e}_i$: Eigenvektoren der Kovarianzmatrix, $i = 1, \ldots, Q$

λ_i : Eigenwerte mit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$

$\mathbf{A}$: Matrix mit $\mathbf{e}_i$ als Zeilenvektoren, Anordnung in absteigender Reihenfolge der Eigenwerte

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_Q)^{\mathrm{T}}$$

- Karhunen-Loève-Transformation:

$$\mathbf{k} = \mathcal{K}\{\mathbf{g}\} = \mathbf{A}\,(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})$$

(Hauptachsen-, Hotelling-Transformation, *Principal Components Analysis*)

Vorgehensweise:

- Schätzung der Kovarianzmatrix, ggf. durch örtliche Mittelung (Ergodenhypothese)
- Lösung des Eigenwertproblems
  → Eigenvektoren sortiert nach fallenden Eigenwerten
- Durchführung der Transformation

Bemerkung:

- Kein schneller Algorithmus für die Karhunen-Loève-Transformation

Eigenschaften

- linear

$$\mathcal{K}\{a\,\mathbf{g}_1 + b\,\mathbf{g}_2\} = a \cdot \mathcal{K}\{\mathbf{g}_1\} + b \cdot \mathcal{K}\{\mathbf{g}_2\}$$

- orthogonal

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

- umkehrbar

$$\mathbf{g} = \mathcal{K}^{-1}\{\mathbf{k}\} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{k} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}$$

- $\mathbf{k}$ ist mittelwertfrei

$$\mathrm{E}\{\mathbf{k}\} = \mathbf{A}\left(\mathrm{E}\{\mathbf{g}\} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}\right) = \mathbf{0}$$

- Komponenten von $\mathbf{k}$ sind unkorreliert
  (bei Gauß'schen Prozessen
  $\Rightarrow$ stochastische Unabhängigkeit)

$$\mathbf{C}_{\mathbf{kk}} = \mathbf{A}\,\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

- nicht separierbar

Karlsruher Institut für Technologie

Bedeutung der λ_i: $\lambda_i = \mathrm{Var}\{\mathtt{k}_i\}$

- λ_i entspricht der Signalenergie, welche die Komponente $\mathtt{k}_i$ zum Kontrast des vektoriellen Bildes beiträgt
- Die Karhunen-Loève-Transformation ist **optimal** bezüglich des **mittleren quadratischen Darstellungsfehlers** („beste lineare Approximation"):

$$\boxed{\mathbf{g} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{k} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{Q} \mathbf{e}_i\,\mathtt{k}_i + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}}$$

- Abbruch der Reihe nach ν Gliedern $\rightarrow$ Schätzung des Vektors $\mathbf{g}$:

$$\boxed{\hat{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{e}_i\,k_i + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}}}$$

- Darstellungsfehler: $\Delta\mathbf{g} := \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}} \qquad \mathrm{E}\{\Delta\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{g}\} = \sum_{i=\nu+1}^{Q} \lambda_i$ ist minimal

Karlsruher Institut für Technologie

Optimale Kompression der Karhunen-Loève-Transformation:

- Normierung der **Eigenwerte** λ_i $\rightarrow$ Interpretation als Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{\xi_i := \frac{\mathrm{E}\{\mathrm{k}_i^2\}}{\sum_{i=1}^{Q} \mathrm{E}\{\mathrm{k}_i^2\}} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i}}$$

- **Entropie** H der Varianzen ist dabei **minimal**

$$\boxed{H = -\sum_{i=1}^{Q} \xi_i \,\mathrm{ld}\, \xi_i}$$

$\Rightarrow$ Varianzen λ_i **maximal ungleichverteilt**

- Die Signalenergie und damit auch gewissermaßen die Information werden durch die Karhunen-Loève-Transformation maximal stark auf möglichst wenige Komponenten konzentriert

IIIT Institut für Industrielle Informationstechnik

Beweis: Unkorreliertheit der Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\mathbf{kk}} &= \mathrm{E}\{\mathbf{k}\,\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{E}\{\mathbf{A}(\mathbf{g}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\} \\
&= \mathbf{A}\,\mathrm{E}\{(\mathbf{g}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})(\mathbf{g}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}})^{\mathrm{T}}\}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\,\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_Q) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e}_Q) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\lambda_1\,\mathbf{e}_1,\ldots,\lambda_Q\,\mathbf{e}_Q) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_1 & \lambda_1\,\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_2 & \\ \lambda_2\,\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_1 & \ddots & \\ & & \lambda_Q\,\mathbf{e}_Q^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_Q \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenvektormatrix $\mathbf{A}$ bewirkt Diagonalisierung der Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}$ ■

Karlsruher Institut für Technologie

Beweis: Beste lineare Approximation

- Sei e ein beliebiger Vektor mit $\|\mathrm{e}\| = 1$ und $\mathrm{k} = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}$ die Projektion von $\mathbf{g}$ auf e. Der Vektor $\mathbf{g}$ ist nach Voraussetzung mittelwertfrei.
- Der Erwartungswert von k lautet:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{k}\} = \mathrm{E}\{\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}\} = \mathrm{E}\{\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\}\,\mathrm{e} = 0$$

- Für die Varianz von k erhält man:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\mathrm{k}\} &= \mathrm{E}\{(\mathrm{k} - \mathrm{E}\{\mathrm{k}\})^2\} = \mathrm{E}\{\mathrm{k}^2\} \\ &= \mathrm{E}\{\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}\cdot\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}\} = \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}\} \\ &= \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{E}\{\mathbf{g}\,\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\}\,\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e}\end{aligned}$$

- Der letzte Ausdruck wird maximal, wenn e und $\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e}$ linear abhängig (d. h. parallel) sind:

$$\lambda\,\mathbf{e} = \mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}_{\mathbf{gg}}\,\mathbf{e}$$

8.7 Karhunen-Loève-Transformation

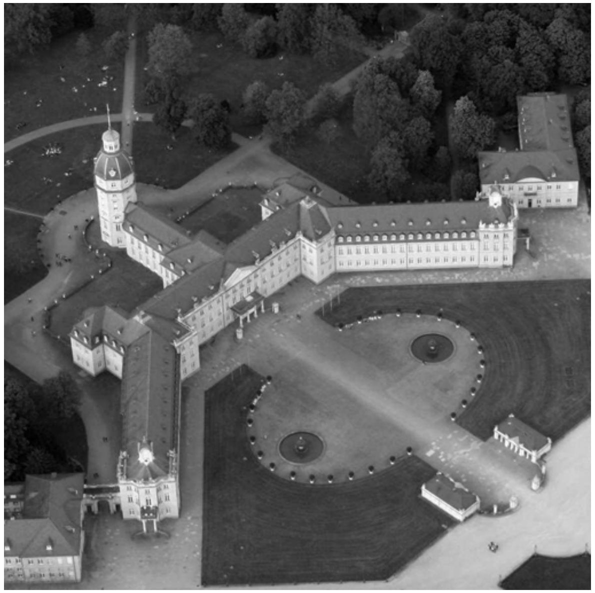
- Die maximal mögliche Varianz von $\mathtt{k}$ ergibt sich für den größten Eigenwert λ
- Das Verfahren wird iterativ angewandt auf

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{e}\,\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}$$

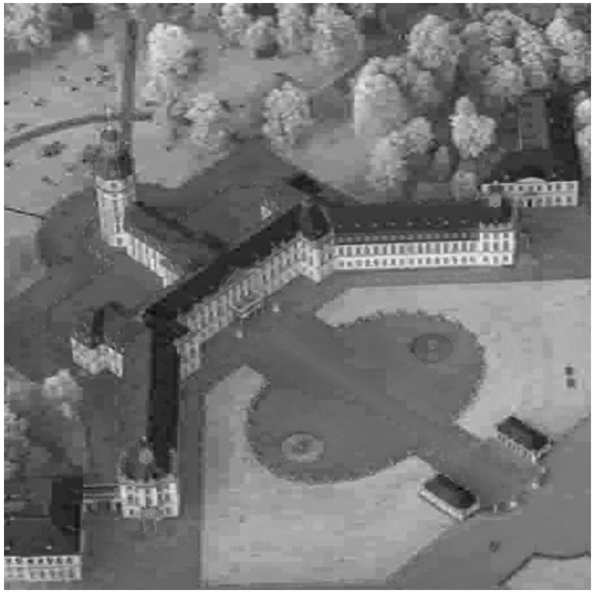
- Ergebnis: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_q$, wobei λ_i unter allen möglichen Transformationen maximal ist
- Damit ist die mittlere mittlere Energie des Darstellungsfehlers insgesamt minimal

Beispiel 8.34: Dekorrelation zwischen Farbkanälen

- Karhunen-Loève-Transformation des RGB-Bildes aus Folie 34
- 1. Komponente stellt 97,1 % der Signalenergie dar; die letzte nur 0,4 %



$\lambda_1 = 7780$

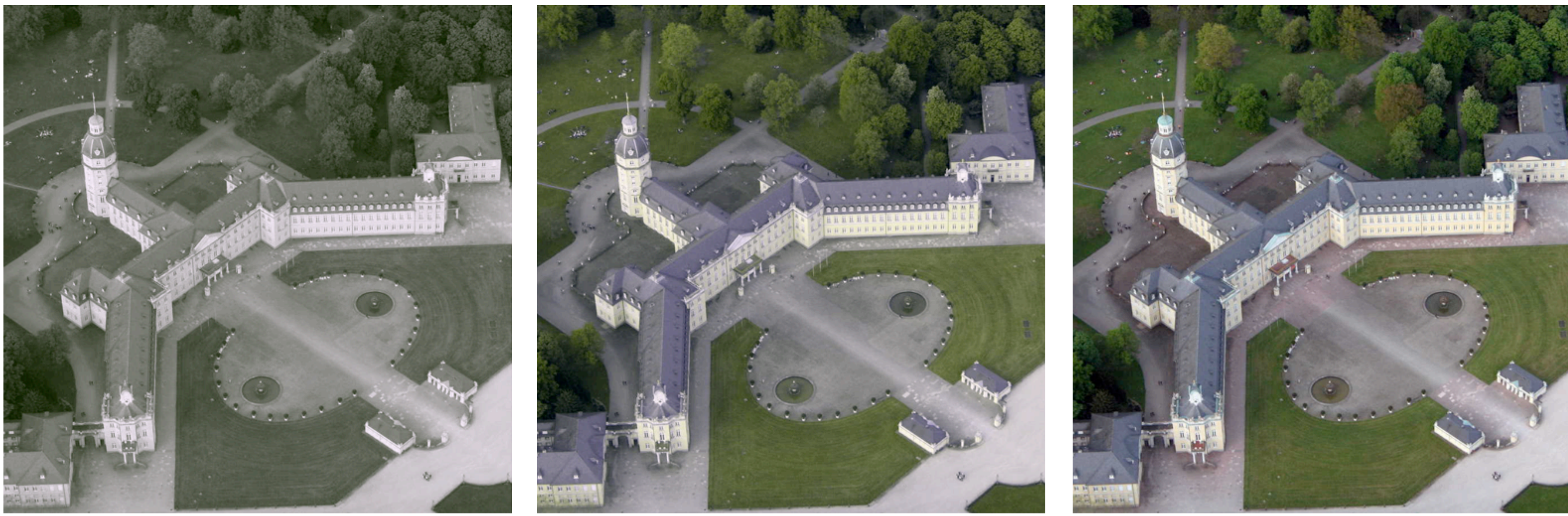


$\lambda_2 = 204$

$\lambda_3 = 30$

Beispiel 8.35: Farbkompression

- Für $\nu = 1$ ergibt sich ein 1D-Farbraum mit dem dominanten Farbton
- Bei $\nu = 2$ werden nur rötliche und cyanfarbene Töne vermisst



$\nu = 1$ $\nu = 2$ $\nu = 3$

Beispiel 8.36: Farbkompression bei schwach korrelierten Kanälen

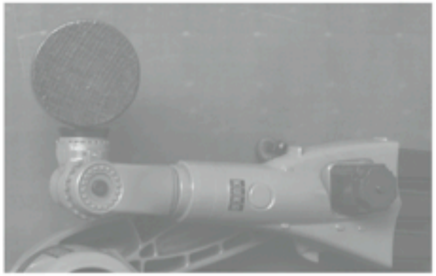
- Korrelationskoeffizienten betragen $\rho_{\mathrm{RG}} = 0{,}59$, $\rho_{\mathrm{GB}} = 0{,}70$ und $\rho_{\mathrm{RB}} = 0{,}32$
- Für $\nu < 3$ muss man große Abstriche bei der Farbwiedergabe hinnehmen

$\nu = 1$

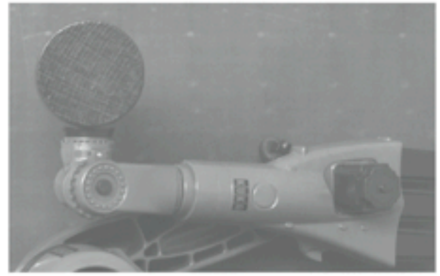
$\nu = 2$

$\nu = 3$

Beispiel 8.37: Dekorrelation multispektraler Bilder

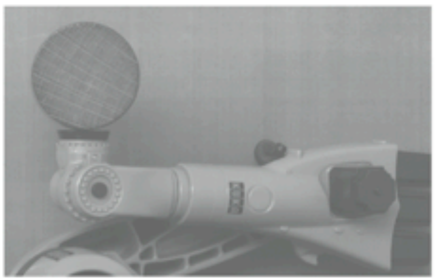


(b) 400 nm



(c) 450 nm

(d) 500 nm



(e) 550 nm

(f) 600 nm

(g) 650 nm

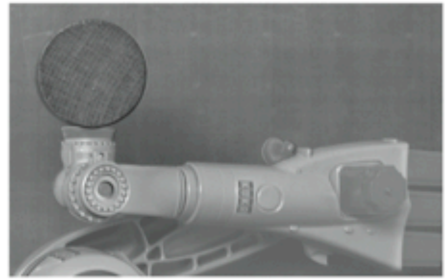
(h) 700 nm

(i) 800 nm

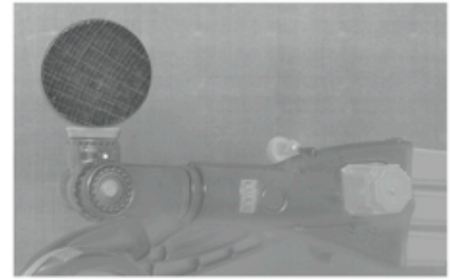
(j) 850 nm

8.7 Karhunen-Loève-Transformation

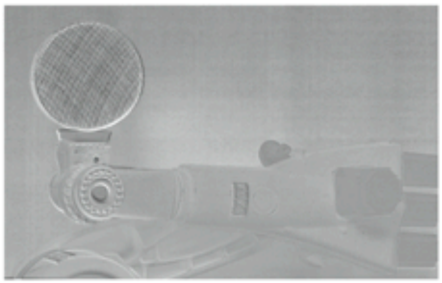
(a) $\lambda_1 = 20829$



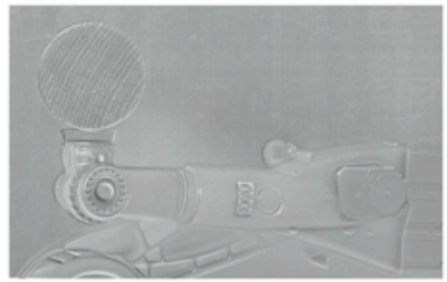
(b) $\lambda_2 = 285$



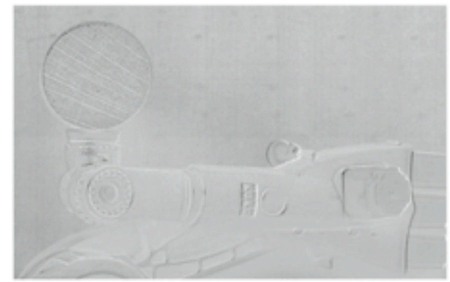
(c) $\lambda_3 = 143$



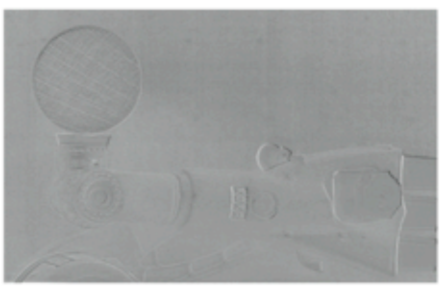
(d) $\lambda_4 = 42$



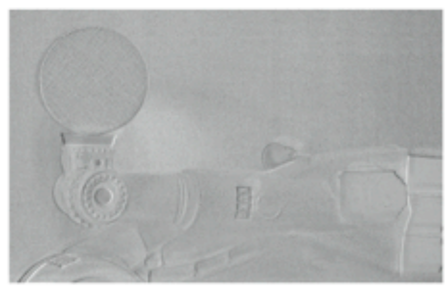
(e) $\lambda_5 = 35$



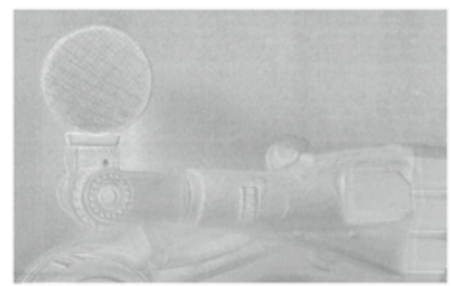
(f) $\lambda_6 = 14$



(g) $\lambda_7 = 11$



(h) $\lambda_8 = 8$

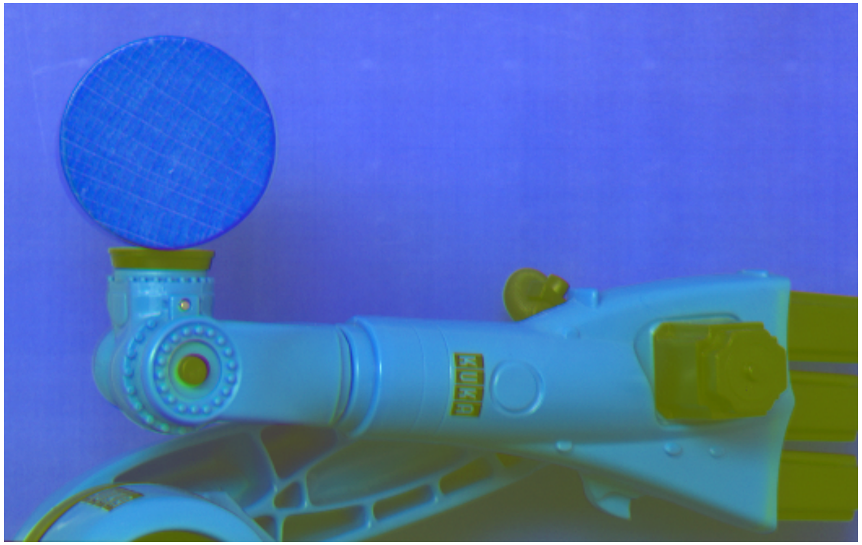


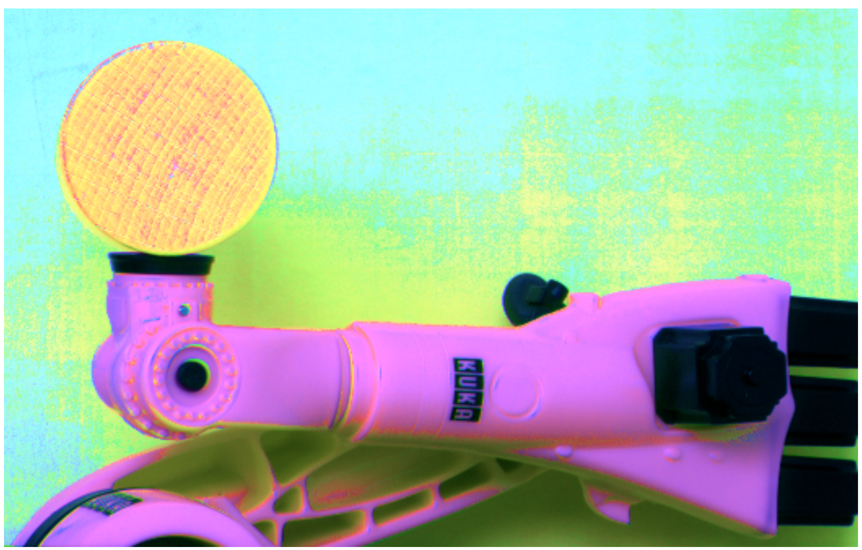
(i) $\lambda_9 = 3$

Komponenten der Karhunen-Loève-Transformierten mit Eigenwerten λ_i ■

8.7 Karhunen-Loève-Transformation

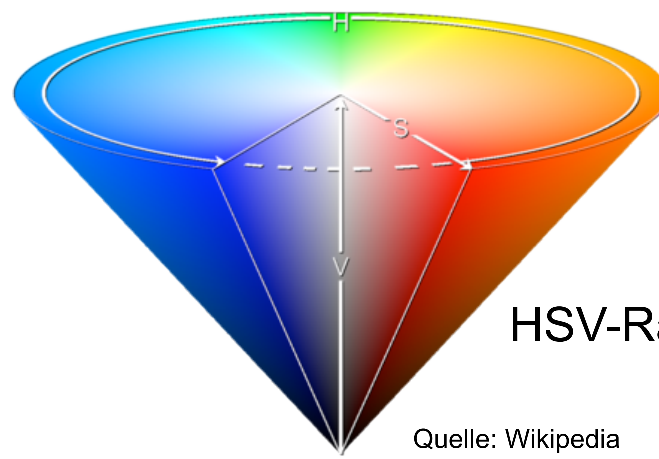
Beispiel 8.38: Fusion multispektraler Bilder





Die ersten 3 KLT-Komponenten

- als RGB-Bild interpretiert (o. li.)
- als HSV-Bild interpretiert (u. li.)

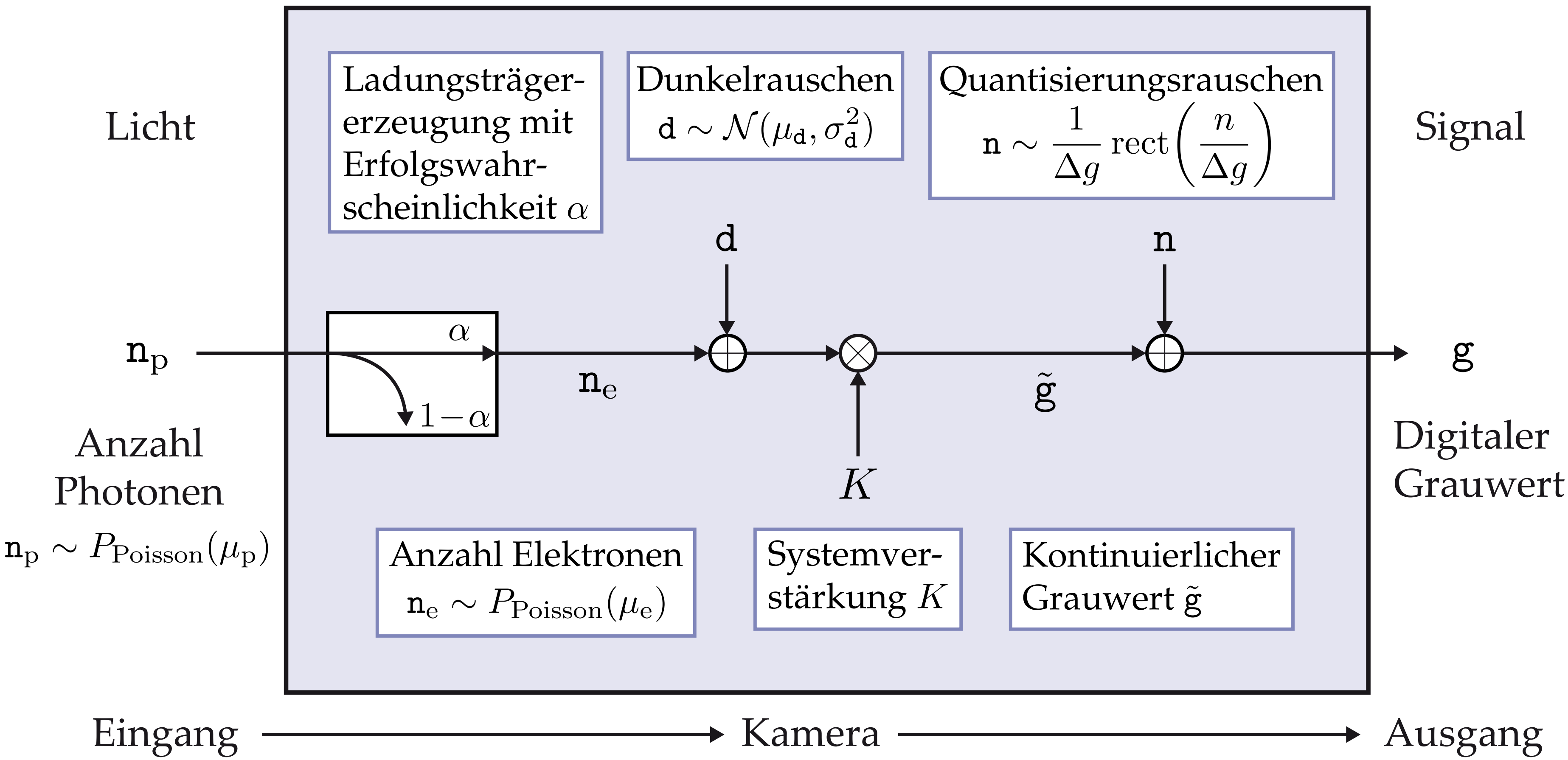


HSV-Raum

Quelle: Wikipedia

Systemmodell für eine digitale Kamera nach EMVA 1288

- lineares Modell, welches die physikalische Eingangsgröße **Licht** mit der Ausgangsgröße **digitaler Grauwert** g verknüpft



Elemente des Modells

- Anzahl der eingehenden **Photonen** $\mathtt{n}_\mathrm{p}$ wird als Poisson-verteilte Zufallsvariable mit $\mathrm{E}\{\mathtt{n}_\mathrm{p}\} = \mu_\mathrm{p}$ und $\mathrm{Var}\{\mathtt{n}_\mathrm{p}\} = \mu_\mathrm{p}$ modelliert
- Mit Wahrscheinlichkeit α (**Quantenwirkungsgrad**) erzeugt ein Photon ein Elektron; Zahl der Elektronen ist ebenfalls Poisson-verteilt
- Das additive **Dunkelrauschen** $\mathtt{d}$ wird als normalverteilt mit $\mathrm{E}\{\mathtt{d}\} = \mu_\mathtt{d}$ und $\mathrm{Var}\{\mathtt{d}\} = \sigma_\mathtt{d}^2$ angenommen; diese Größe fasst alle Rauscheinflüsse der Elektronik außer dem Quantisierungsrauschen zusammen
- Die Proportionalität zwischen $\mathtt{n}_\mathrm{e} + \mathtt{d}$ und dem kontinuierlichen Grauwert $\tilde{\mathtt{g}}$ wird mit der **Systemverstärkung** K beschrieben
- Der Einfluss der äquidistanten Quantisierung wird als additives, gleichverteiltes **Quantisierungsrauschen** mit $\mathrm{E}\{\mathtt{n}\} = 0$ und $\mathrm{Var}\{\mathtt{n}\} = (\Delta g)^2/12$ modelliert (vgl. Vorlesung Messtechnik)

- Das lineare Modell verliert für hohe μ_p durch Sättigungseffekte bei realen Kameras ihre Gültigkeit