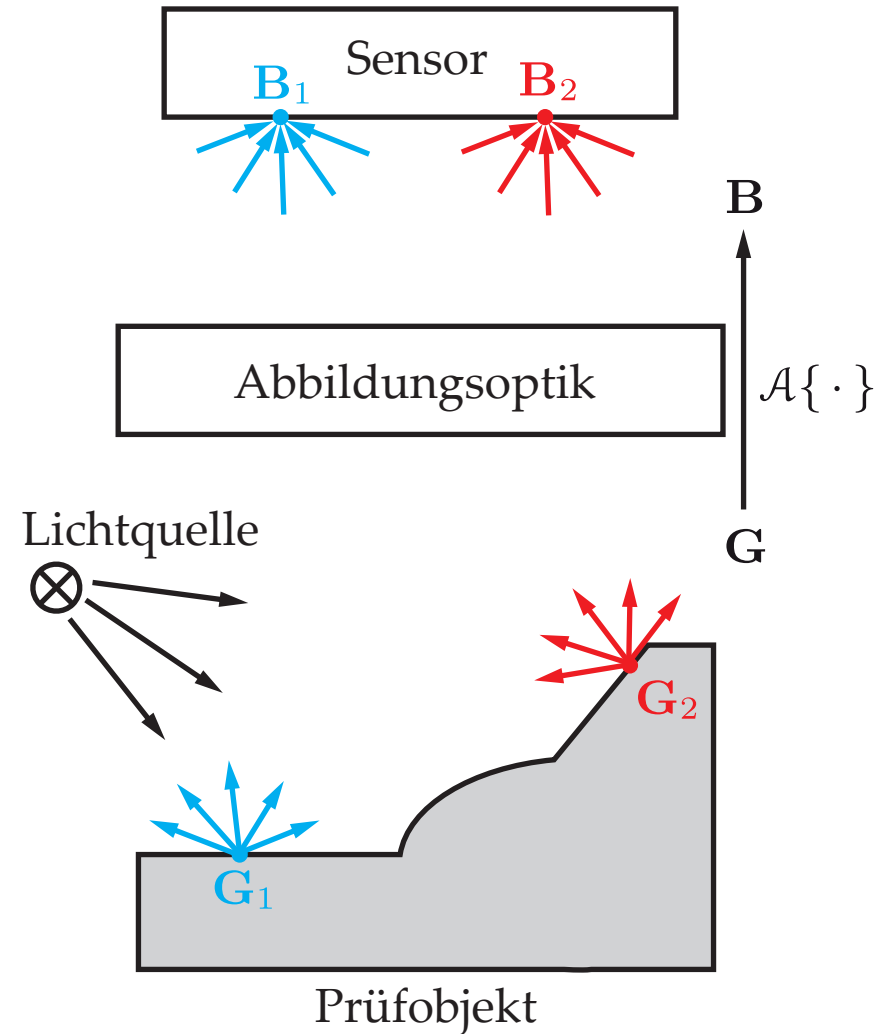


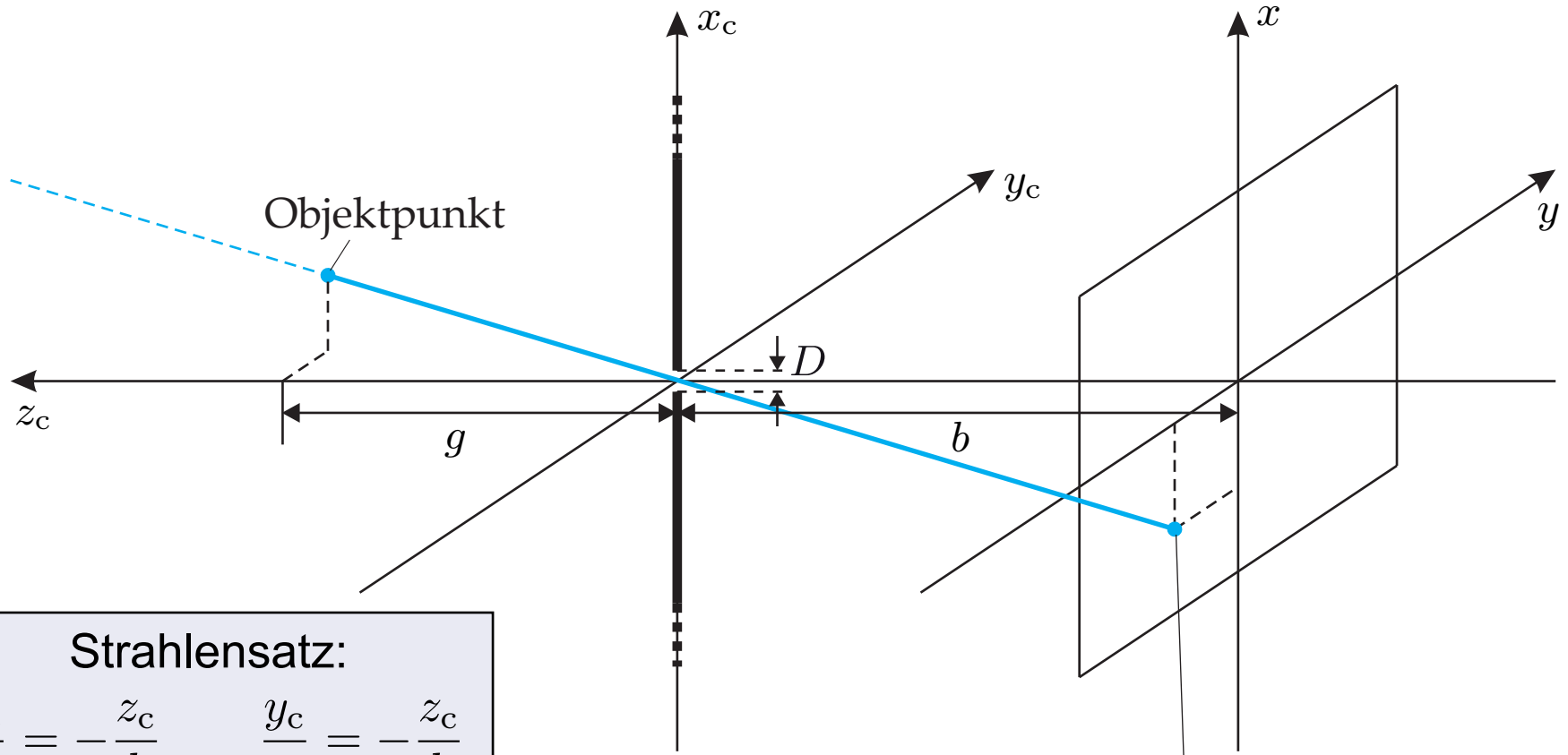
3. Optische Abbildung

3.1 Einleitung

- **Abbildungsoptik** bildet im Idealfall jeden interessierenden Punkt des Prüfobjekts auf genau einen Punkt auf dem Sensor (**scharfe optische Abbildung**)
- Ausbreitung, Beugung und Interferenz von Licht werden durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben
- **Geometrische Optik** liefert praxistaugliche Vereinfachung (Voraussetzung: relevante Abmessungen des optischen Systems $\gg \lambda$)
- Wesentliche Gesetze sind dabei:
 - **Reflexionsgesetz**
 - **Brechungsgesetz**



3.2 Abbildung mit e. Lochkamera, Zentralprojektion



Strahlensatz:

$$\frac{x_c}{x} = -\frac{z_c}{b} \quad \frac{y_c}{y} = -\frac{z_c}{b}$$

$z_c = g$: Gegenstandsweite

Abbildungsoptik:
Lochblende

Bildpunkt

x_c, y_c, z_c : Kamerakoordinaten $\xrightarrow{\text{Koordinatentransformation}}$ x, y : Bildkoordinaten

3.2 Abbildung mit e. Lochkamera, Zentralprojektion

Koordinatentransformation: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{b}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Zentralprojektion

Eigenschaften der Zentralprojektion:

- nicht umkehrbar, Informationsverlust: alle Objektpunkte auf einem Zentralstrahl werden auf denselben Bildpunkt abgebildet
→ problematisch bei transparenten Oberflächen
- wahre Größe und Abstand von Objekten nicht bestimmbar, Vergrößerung ist entfernungsabhängig:

$$V = \frac{b}{z_c} = \frac{b}{g}$$

nicht längentreu!

Spezielle Eigenschaften der Lochkamera:

- + unendliche Schärfentiefe
- lichtschwach

3.2 Abbildung mit e. Lochkamera, Zentralprojektion

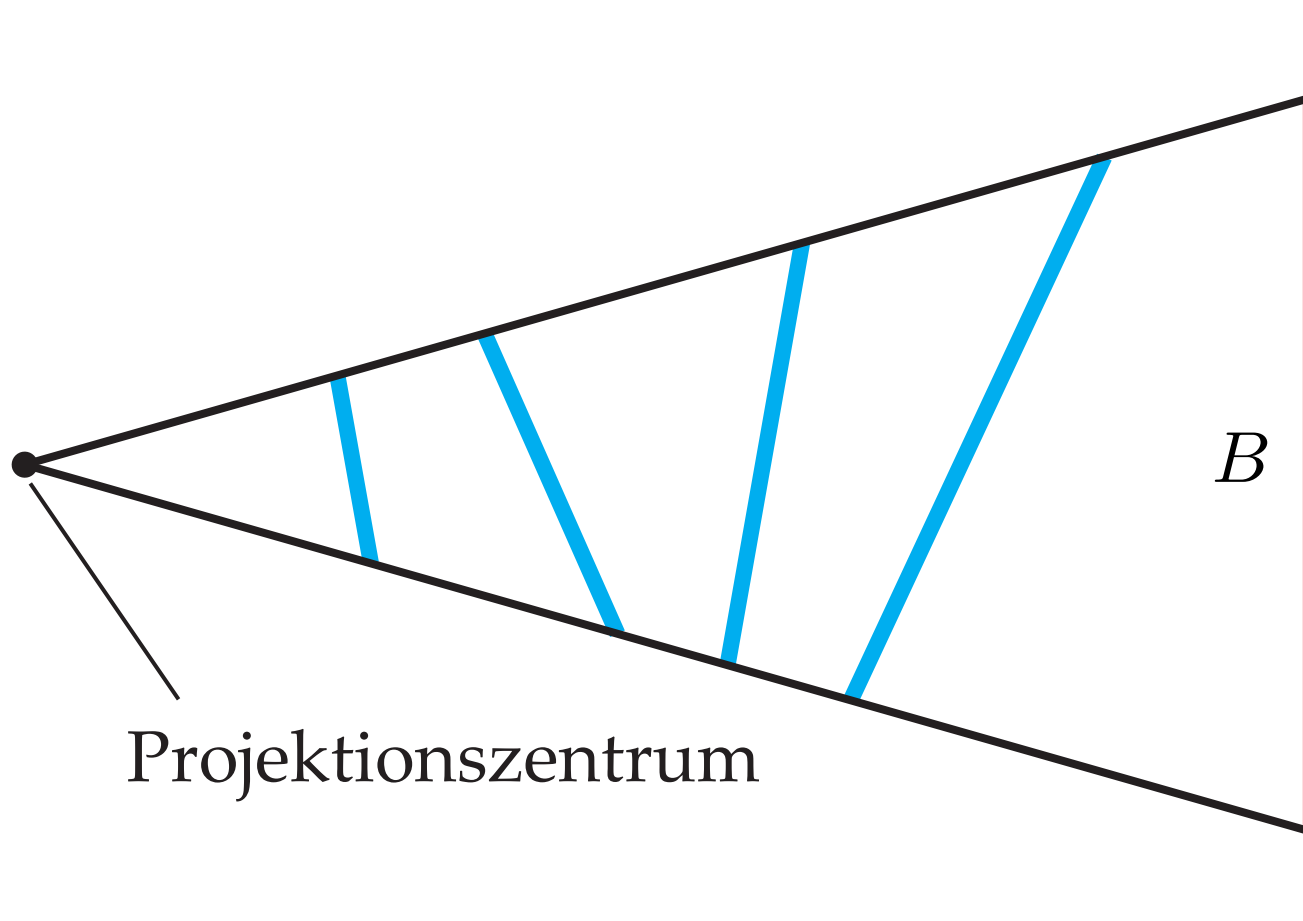


Lochkamera (*pinhole camera*)



Aufnahme einer Lochkamera

3.2 Abbildung mit e. Lochkamera, Zentralprojektion



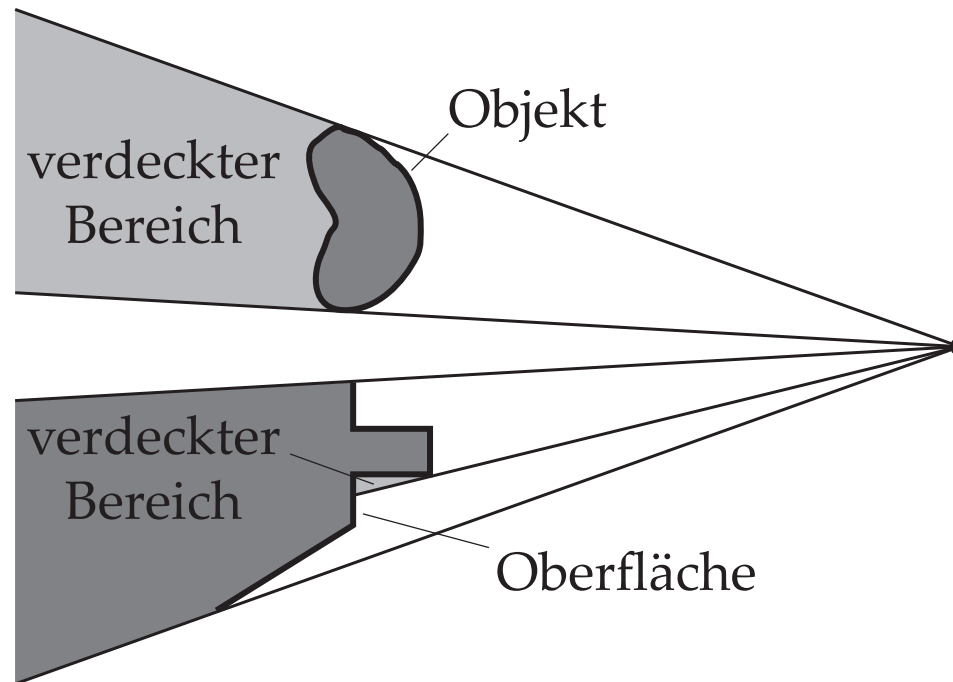
Projektionszentrum

B

Informationsverlust bei der Zentralprojektion

Wichtiger Spezialfall: **undurchsichtige Objekte (opake Objekte)**

- Jeder Bildpunkt resultiert aus genau einem Objektpunkt im Gegensatz zu transparenten Objekten

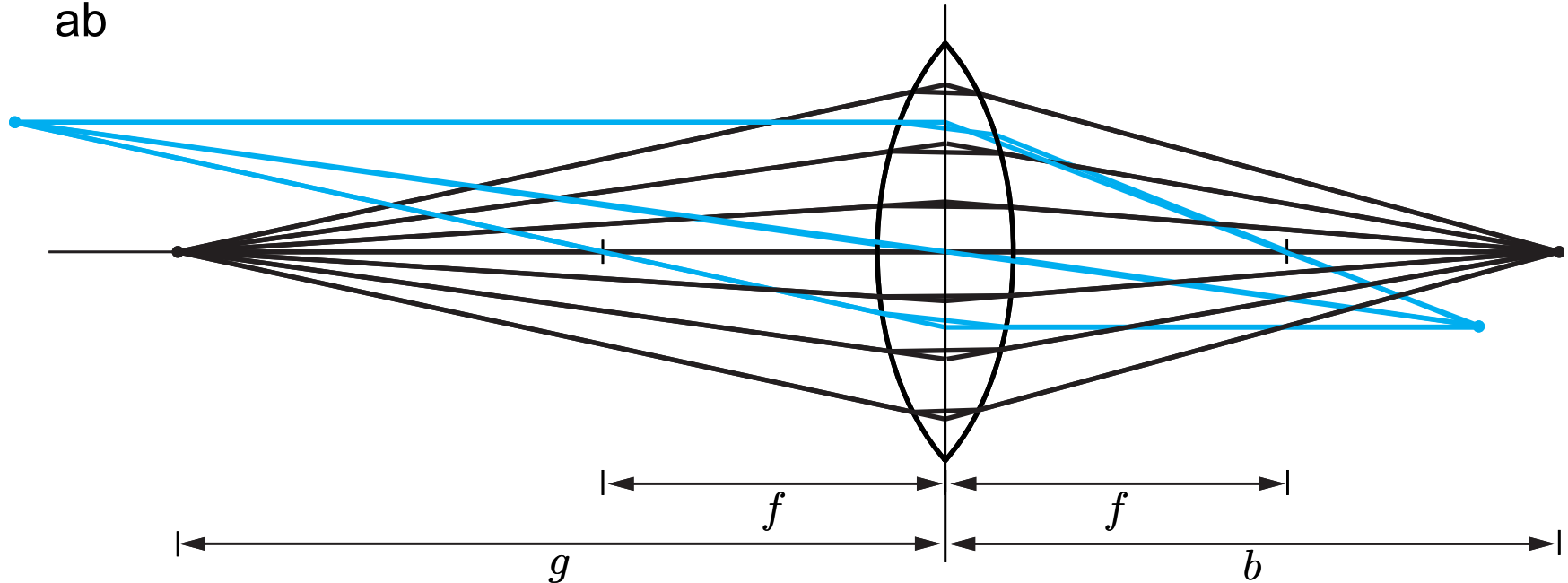


Verdeckung tieferliegender Objektpunkte

3.4 Abbildung mit einer Linse (Objektiv)

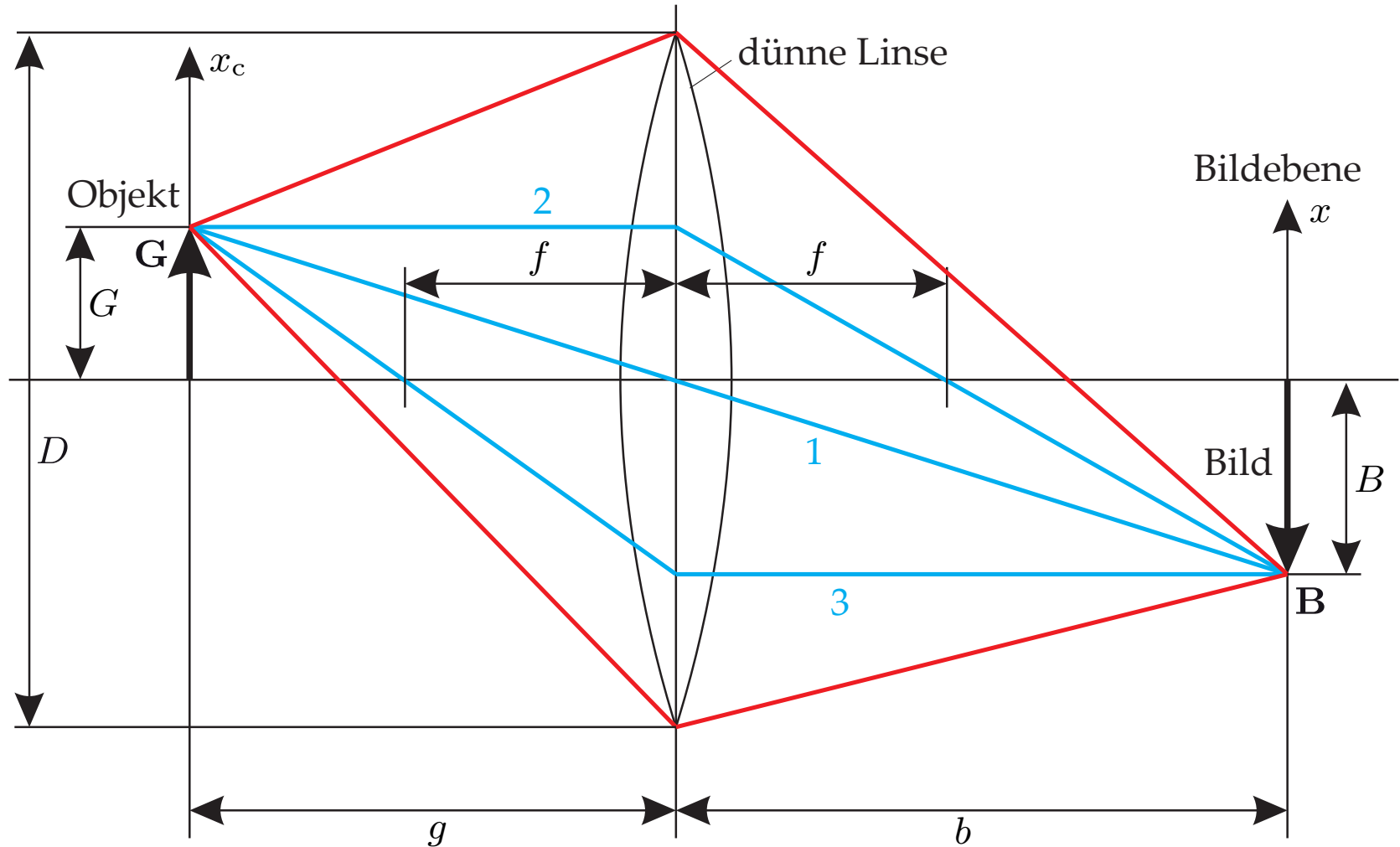
Paraxiale Näherung und Gauß'sche Optik

- Annahme achsnaher und näherungsweise achsparalleler Strahlen
- Wegen $\sin \theta \approx \theta$ vereinfachen sich die Abbildungsgleichungen wesentlich
- Sphärische Linsen bilden homozentrische Strahlenbündel auf ebensolche ab



- Abbildungsfehler bei realen Linsen, da paraxiales Modell nur Näherung
 - Durch mehrere Linsen lassen sich diese Abbildungsfehler korrigieren
- ➔ vereinfachte Gleichungen weiterhin anwendbar: **Gauß'sche Optik**

3.4.2 Abbildungsgesetz



Strahlensatz:

$$(1) \quad \frac{G}{g} = -\frac{B}{b}$$

$$(2) \quad \frac{G}{f} = -\frac{B}{b-f}$$

Gl. (1) : Gl. (2)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}} \quad \text{Abbildungsgleichung (Gauß'sche Abbildung)}$$

Nur Objektpunkte im Abstand $g = \frac{b f}{b - f}$ werden scharf, d. h. auf einen Punkt in der Bildebene abgebildet

Eigenschaften der Abbildung mit einer Linse:

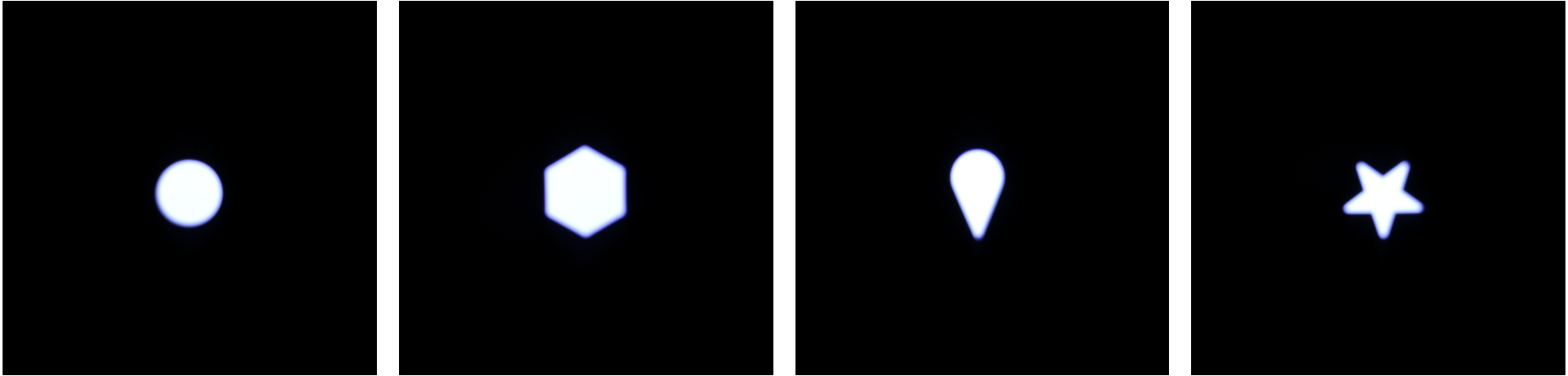
- Vergrößerung $V = b/g$ abhängig von der Objektentfernung g
 - begrenzte Schärfentiefe
 - + lichtstark
 - geometrische Verzerrungen
 - Schärfefehler
- } durch Aberrationen (Abbildungsfehler)

Vorzeichenkonvention für die optische Abbildung mit einer Linse

Variable	positive Werte	negative Werte
Brennweite f	bildseitiger Brennpunkt rechts von der Linse	bildseitiger Brennpunkt links von der Linse
Gegenstandsweite g	Objektpunkt G links von der Linse	Objektpunkt G rechts von der Linse
Bildweite b	Bildpunkt B rechts von der Linse	Bildpunkt B links von der Linse
Gegenstandsgröße G	Objektpunkt G oberhalb der optischen Achse	Objektpunkt G unterhalb der optischen Achse
Bildgröße B	Bildpunkt B oberhalb der optischen Achse	Bildpunkt B unterhalb der optischen Achse

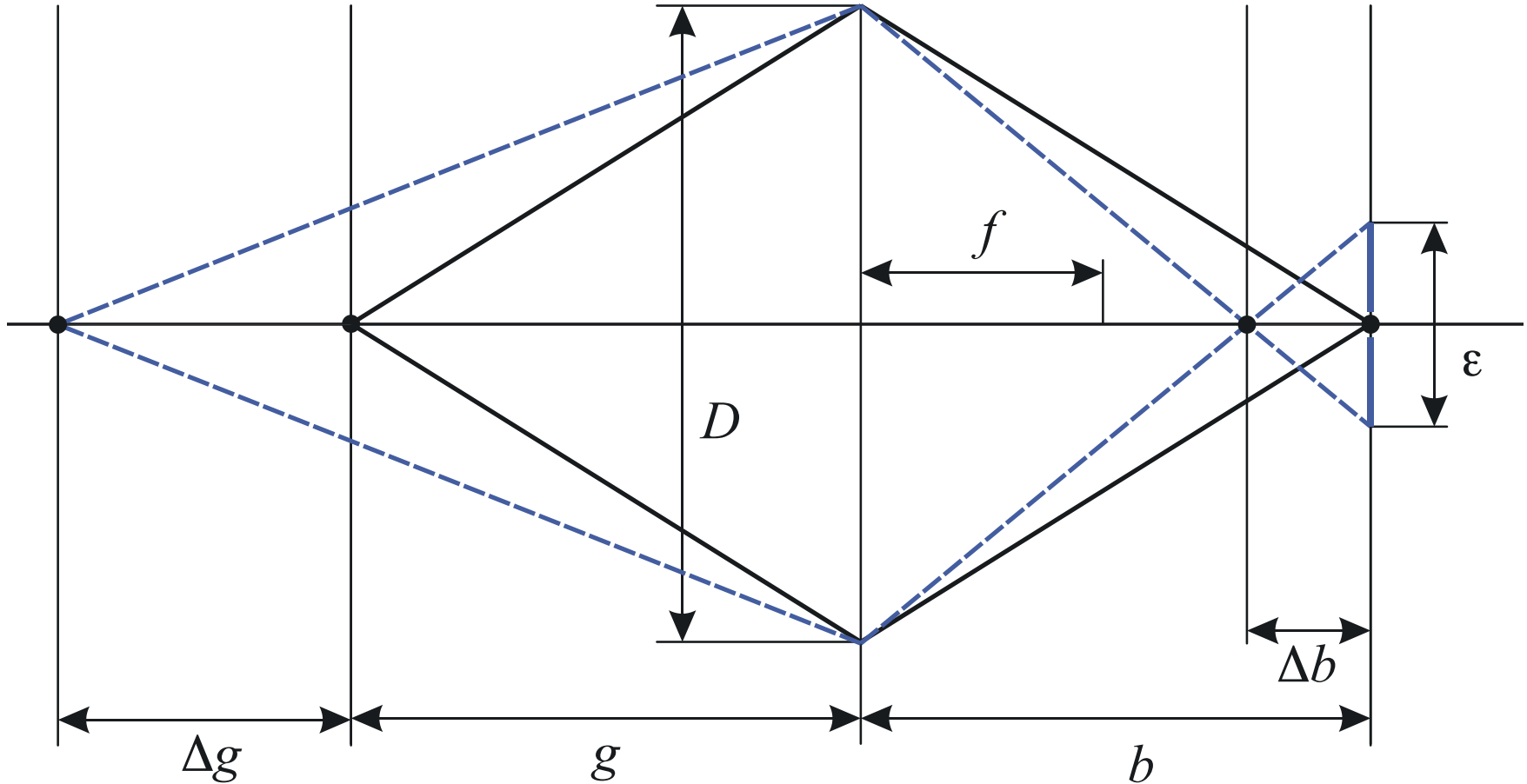
Nach Zinth & Zinth (2013)

3.4.4 Schärfentiefe



Unscharfe Aufnahmen einer kleinen hellen LED mit verschiedenen Blenden





- **Vorgabe:** Noch tolerierte Unschärfe ϵ (Bsp.: Kantenlänge eines Pixels)
- **Schärfentiefe** $\Delta g(\epsilon)$: zulässige Verschiebung eines Objektpunktes aus der objektseitigen Schärfenebene, so dass das resultierende Unschärfescheibchen $< \epsilon$ bleibt

3.4.4 Schärftiefe

$$(1) \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{\Delta b}{b - \Delta b}$$

$$(2) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$(3) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g + \Delta g} + \frac{1}{b - \Delta b}$$

b und Δb eliminieren!

gilt näherungsweise für beide Richtungen

$$\Rightarrow \Delta g = \Delta g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon g}{\frac{D f}{g - f} - \varepsilon} \approx \pm |\varepsilon| \frac{g(g - f)}{D f} = \pm |\varepsilon| O \frac{g(g - f)}{f^2}$$

falls $|\varepsilon| \ll \frac{D f}{g - f}$

mit Blendenzahl $O := \frac{f}{D}$

Abblenden, d. h.: $D \searrow$ bzw. $O \nearrow \Rightarrow$ mehr Schärftiefe, weniger Licht

Beispiel 3.1: Fernaufnahme

■ Es gilt: $g \gg f$, $b \approx f$

■ Exakte Formel:

$$\Delta g = \frac{\varepsilon g}{\frac{f^2}{O(g-f)} - \varepsilon}$$

Näherung gilt hier nicht!

Bsp.: CCD-Sensor, Kantenlänge Einzelsensor $\approx 10 \mu\text{m} \Rightarrow |\varepsilon| = 10 \mu\text{m}$

Blende $O = 11$, $g = 2 \text{ m}$, $f = 15 \text{ mm}$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = 10 \mu\text{m} \Rightarrow \Delta g = 66 \text{ m} \\ \varepsilon = -10 \mu\text{m} \Rightarrow \Delta g = -1 \text{ m} \end{array} \right\} \text{Schärfebereich: } 1 \text{ m} \leq g \leq 68 \text{ m}$$

Besonders bei kurzen Brennweiten: große Schärfentiefe

3.4.4 Schärfentiefe

Beispiel 3.2: Makroaufnahme

- Es gilt: $g \approx b \approx 2f$, $V \approx 1$

$$\Delta g \approx \pm 2 |\varepsilon| O$$

Bsp.: $|\varepsilon| = 10 \mu\text{m}$, $O = 11 \Rightarrow \Delta g = \pm 0,2 \text{ mm}$

scharfer Bereich sehr schmal

Beispiel 3.3: Mikroskopaufnahmen

- Starke Vergrößerung, $g \approx f$,

Abbildungsgleichung $\Rightarrow b = \frac{f^2}{g - f}$

$$V = \frac{b}{g} \gg 1$$

$$\Rightarrow \Delta g \approx \pm |\varepsilon| O \frac{g}{b} = \pm \frac{|\varepsilon| O}{V}$$

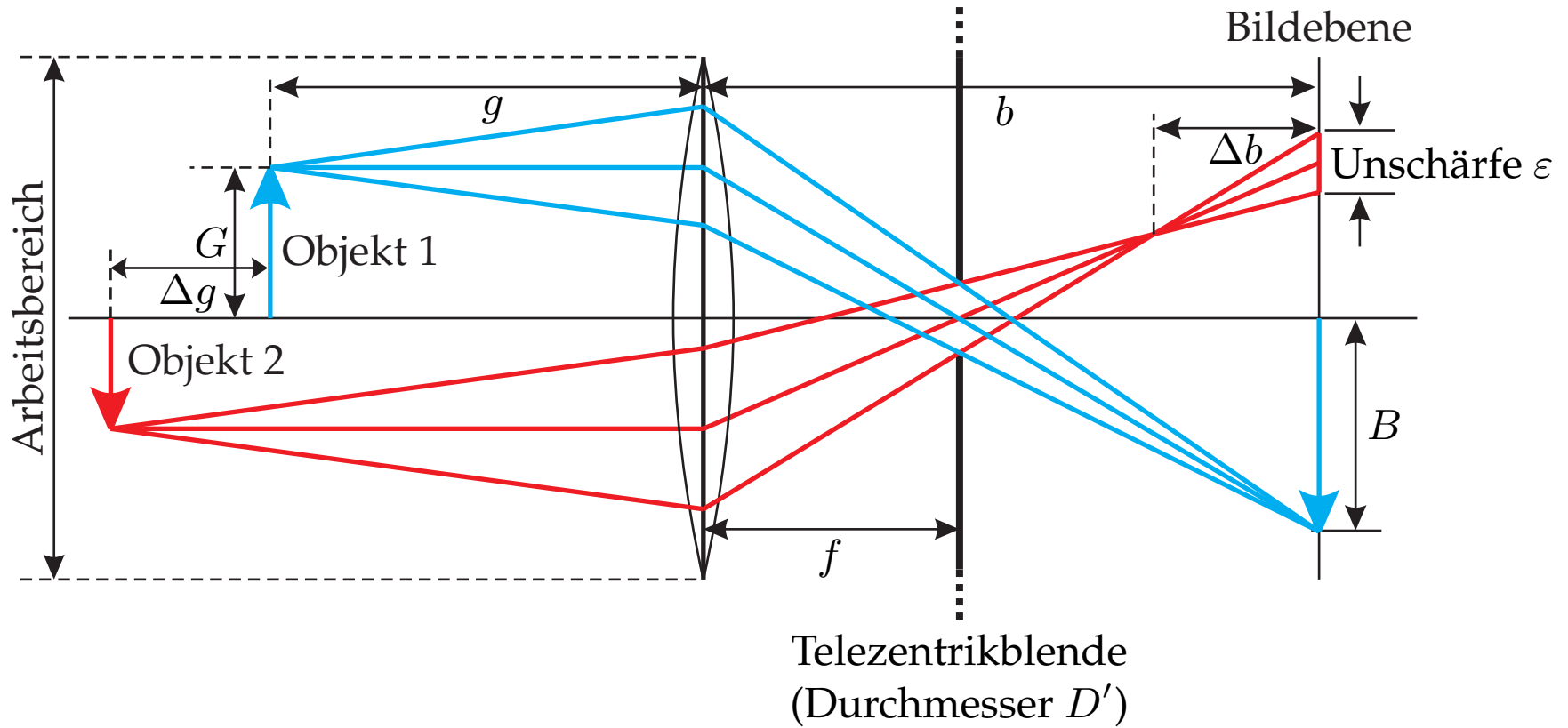
steht auf
Mikroskop-
objektiven

Bsp.: $V = 25$, $|\varepsilon| = 10 \mu\text{m}$, $O = 11 \Rightarrow \Delta g \approx \pm 4,4 \mu\text{m}$

Schärfentiefe extrem gering!

3.4.5 Telezentrische Abbildung

- **Wunsch:** Abbildungsmaßstab (Vergrößerung) unabhängig vom Objekt-
abstand g
- **Lösung:** Telezentrische Abbildung (Parallelprojektion)

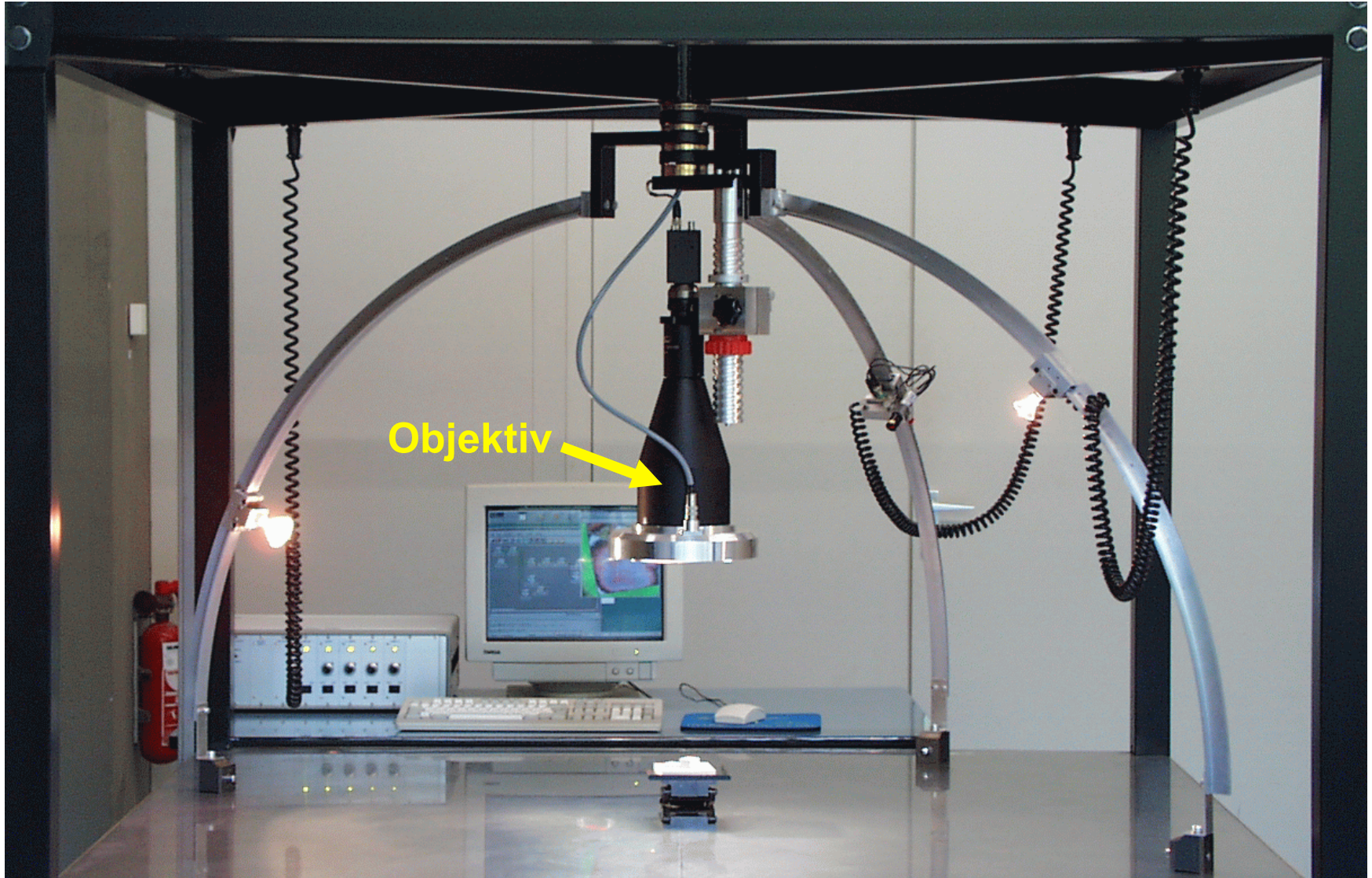


Eigenschaften:

- + Vergrößerung $V = \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$ unabhängig von g !
- + Abbildung ist **längentreu** (→ optische Messtechnik)
- + Objektpunkt außerhalb der Schärfenebene → Unschärfescheibchen in Bildebene symmetrisch zum scharfen Bildpunkt, den Objektpunkt in Schärfenebene ergäbe
- Lichtverlust an Telezentrikblende
- Arbeitsbereich < Durchmesser Objektiv

3.4.5 Telezentrische Abbildung

Sichtprüfungsaufbau mit telezentrischem Objektiv



3.4.5 Telezentrische Abbildung

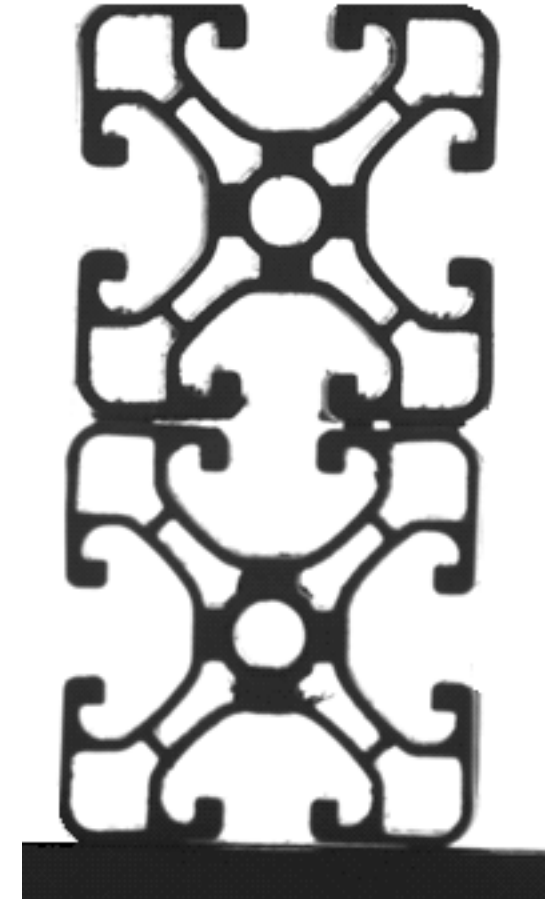
Beispiel 3.4: Telezentrische Bildaufnahme



Szene aus zwei
Aluminiumprofilen



Entozentrisches
Objektiv



Telezentrisches
Objektiv

3.4.5 Telezentrische Abbildung

Schärfentiefe $\Delta g(\varepsilon) = ?$

$$(1) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{f g}{g - f}$$

$$(2) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g + \Delta g} + \frac{1}{b - \Delta b} \quad \Leftrightarrow \quad b - \Delta b = \frac{f (g + \Delta g)}{g + \Delta g - f}$$

$$(3) \quad \frac{\varepsilon}{D'} = \frac{\Delta b}{b - \Delta b - f}$$

b und Δb eliminieren!

- (1) – (2): $\Delta b = \frac{f g}{g - f} - \frac{f (g + \Delta g)}{g + \Delta g - f}$

3.4.5 Telezentrische Abbildung

- (2) und (1)–(2) in (3) einsetzen:

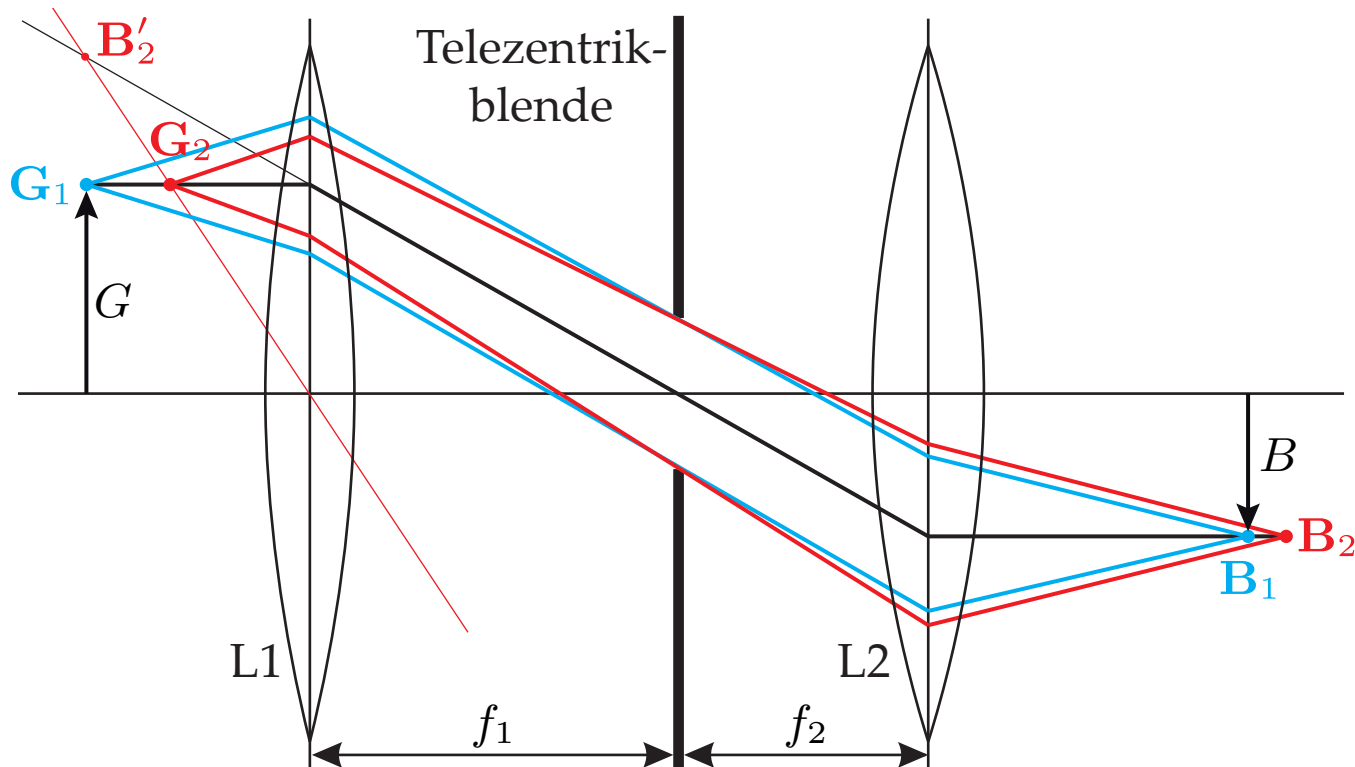
$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{D'} &= \frac{\frac{fg}{g-f} - \frac{f(g+\Delta g)}{g+\Delta g-f}}{\frac{f(g+\Delta g)}{g+\Delta g-f} - f} = \frac{\frac{g}{g-f} - \frac{g+\Delta g}{g+\Delta g-f}}{\frac{g+\Delta g}{g+\Delta g-f} - 1} \\ &= \frac{\frac{g(g+\Delta g-f)}{g-f} - (g+\Delta g)}{f} \\ &= \frac{g^2 + g\Delta g - fg - g^2 - g\Delta g + fg + f\Delta g}{(g-f)f} = \frac{\Delta g}{g-f}\end{aligned}$$

⇒ Schärfentiefe

$$\Delta g = \Delta g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{D'} (g - f)$$

Beidseitige Telezentrie

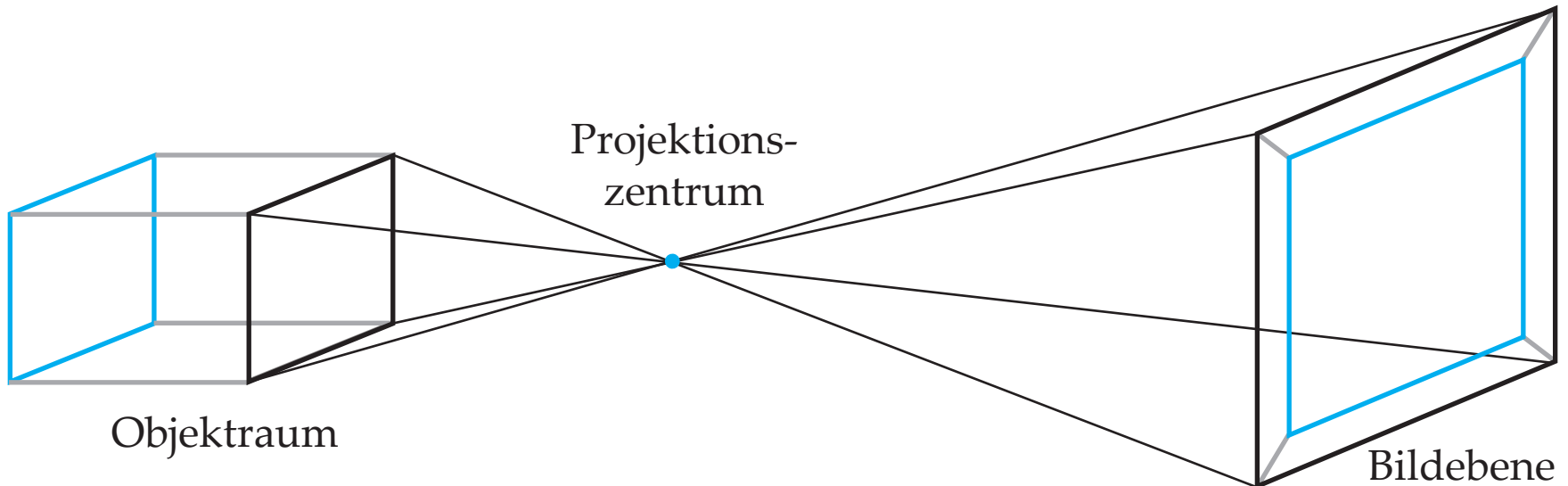
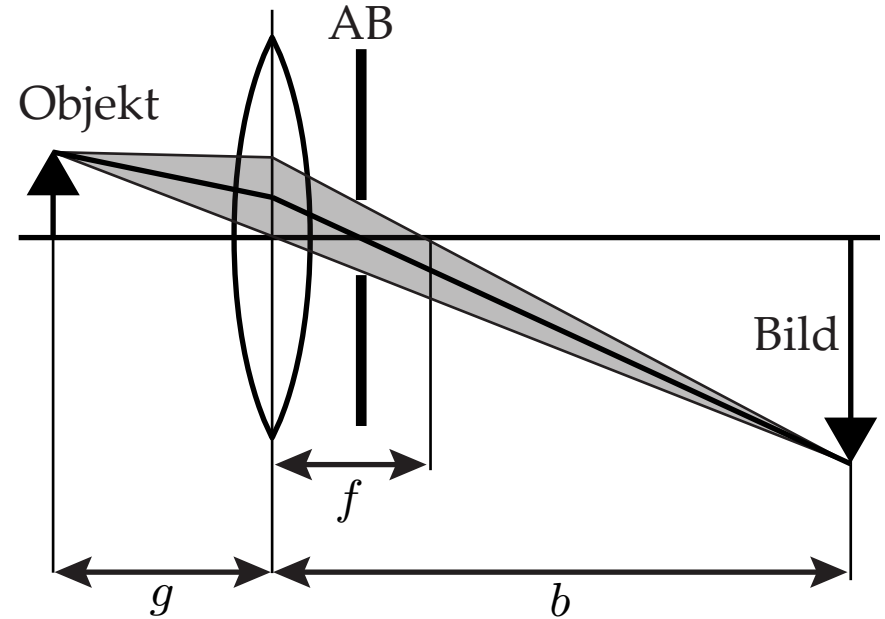
- Telezentrikblende liegt gleichzeitig im bildseitigen Brennpunkt der Linse L1 und im objektseitigen Brennpunkt der Linse L2
- Hauptstrahlen verlaufen beidseitig parallel zur optischen Achse
- + Fokussierung möglich, ohne den Abbildungsmaßstab zu verändern



3.4.6 Perspektive

Entozentrische Perspektive

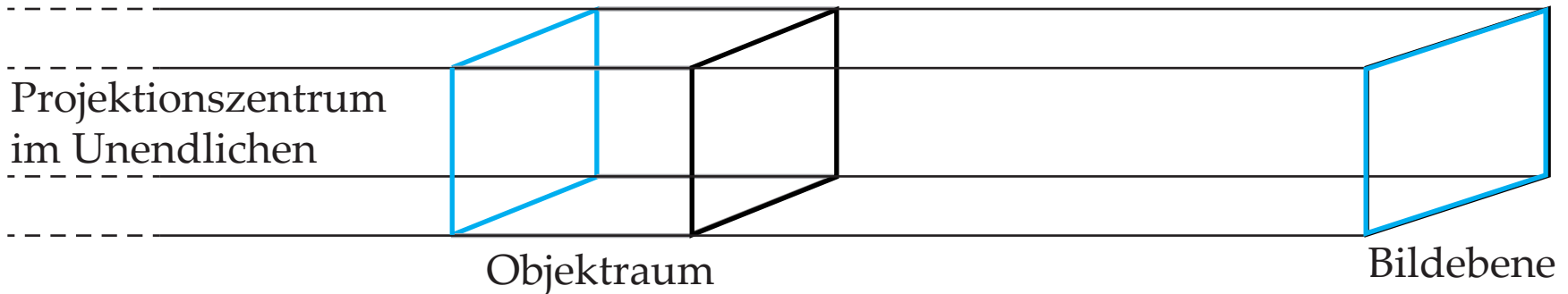
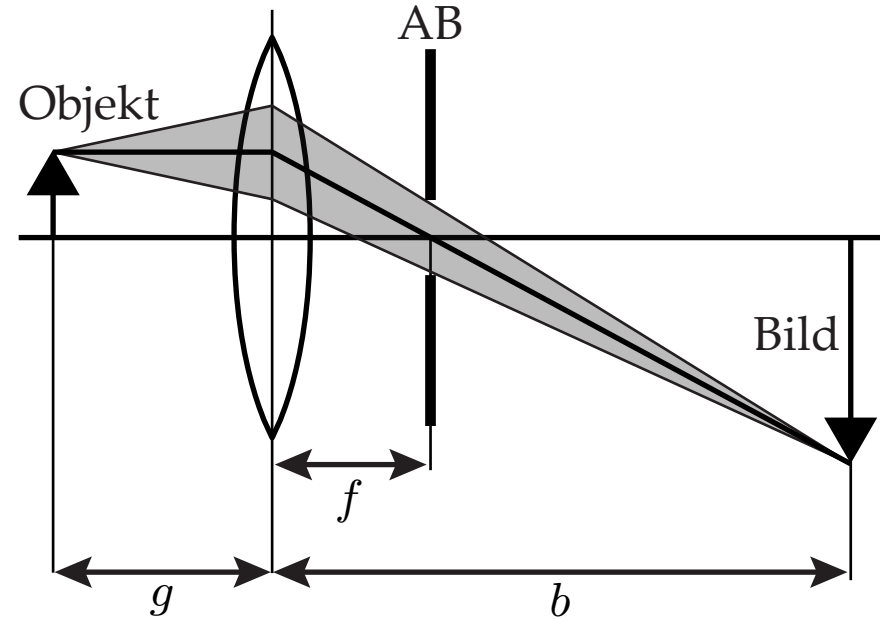
- Aperturblende befindet sich vor dem bildseitigen Brennpunkt
- Perspektivitätszentrum liegt zwischen Objekt und Bild
- Entfernte Objekte erscheinen kleiner als nähere
- Entspricht dem menschlichen Seheindruck



3.4.6 Perspektive

Telezentrische Perspektive

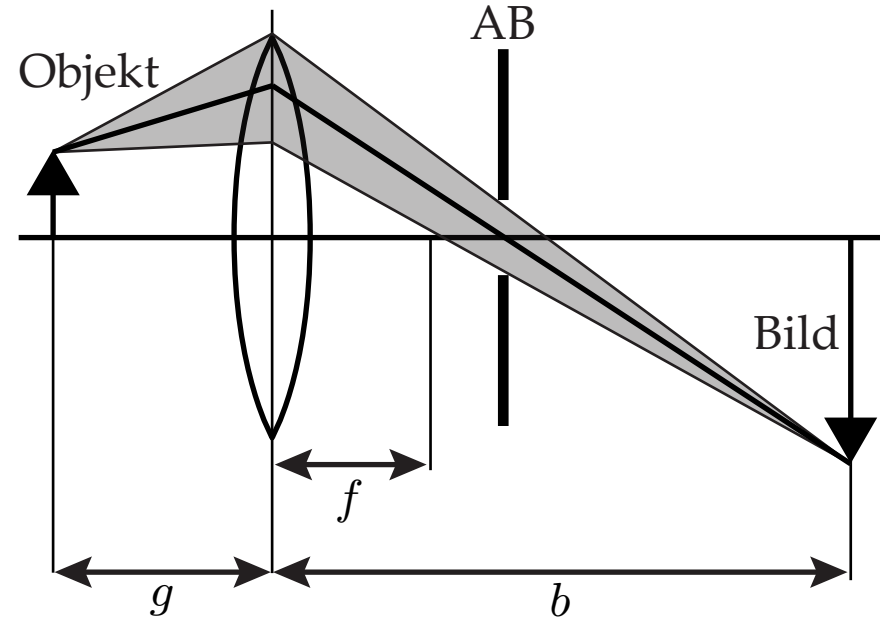
- Aperturblende befindet sich im bildseitigen Brennpunkt
- Perspektivitätszentrum liegt im Unendlichen
- Abbildungsmaßstab ist unabhängig von der Gegenstandsweite
→ „Messobjektive“
- Abbildung entspricht einer Parallelprojektion



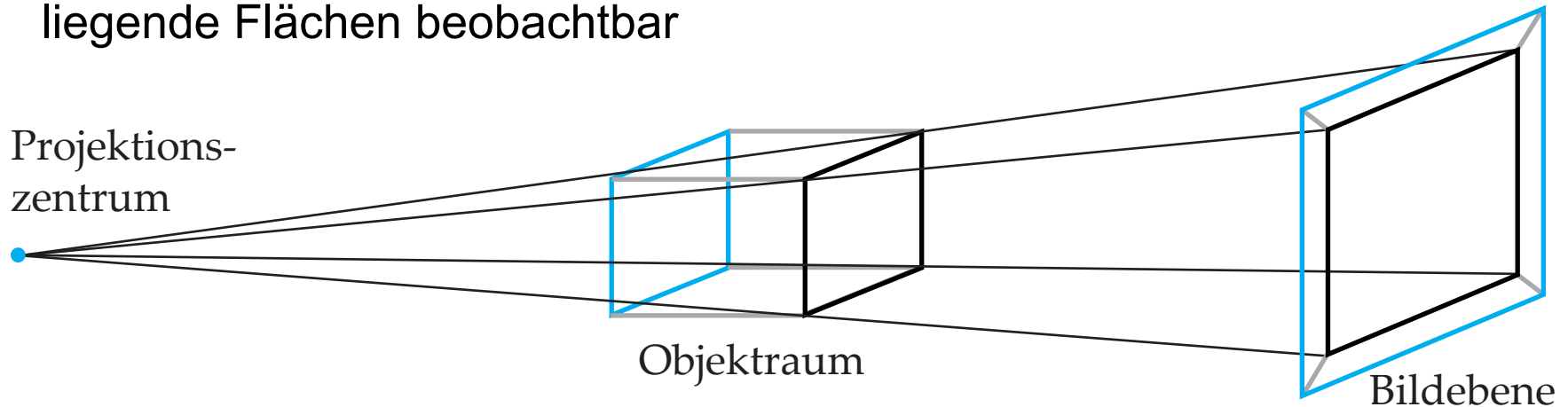
3.4.6 Perspektive

Hyperzentrische Perspektive

- Aperturblende liegt zwischen dem bildseitigen Brennpunkt und der Bildebene
- Perspektivitätszentrum liegt im Objektraum von der Kamera aus gesehen jenseits des Objekts
- Weiter entfernte Objekte erscheinen größer als nähere
- Parallel zur optischen Achse liegende Flächen beobachtbar

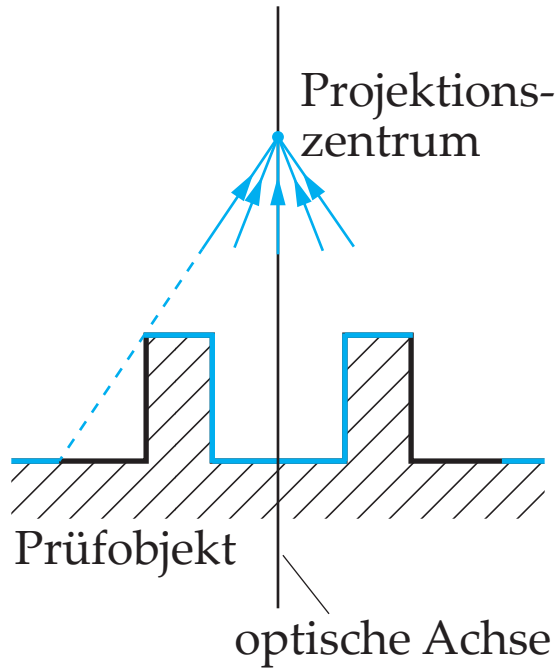


Projektions-
zentrum

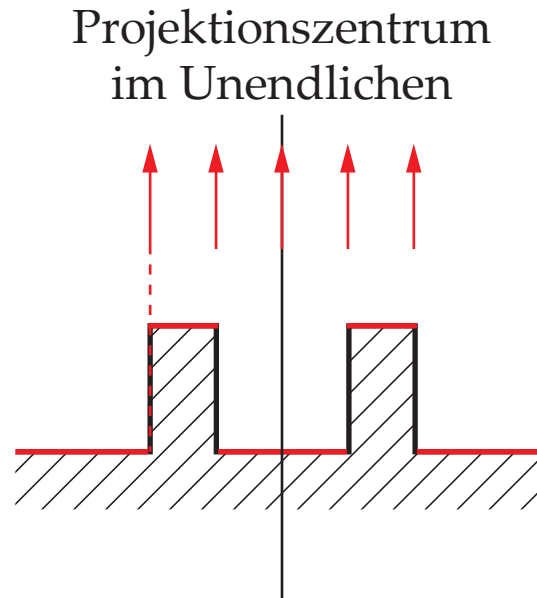


3.4.6 Perspektive

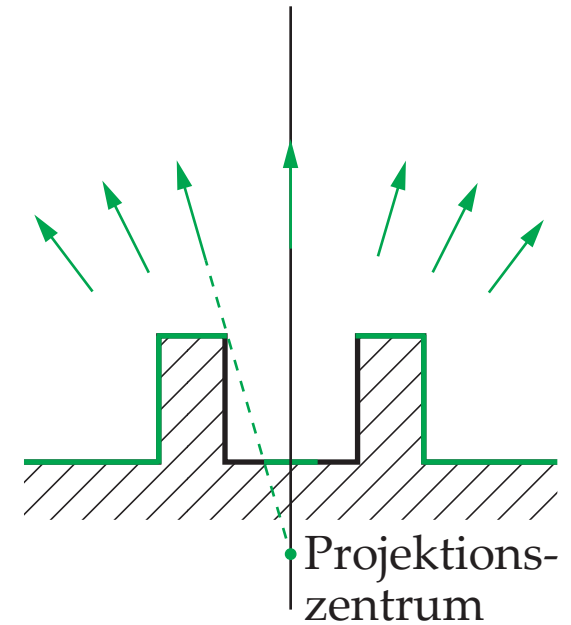
Sichtbarkeit und Verdeckung von Objektbereichen bei unterschiedlichen Perspektiven



Entozentrische
Perspektive



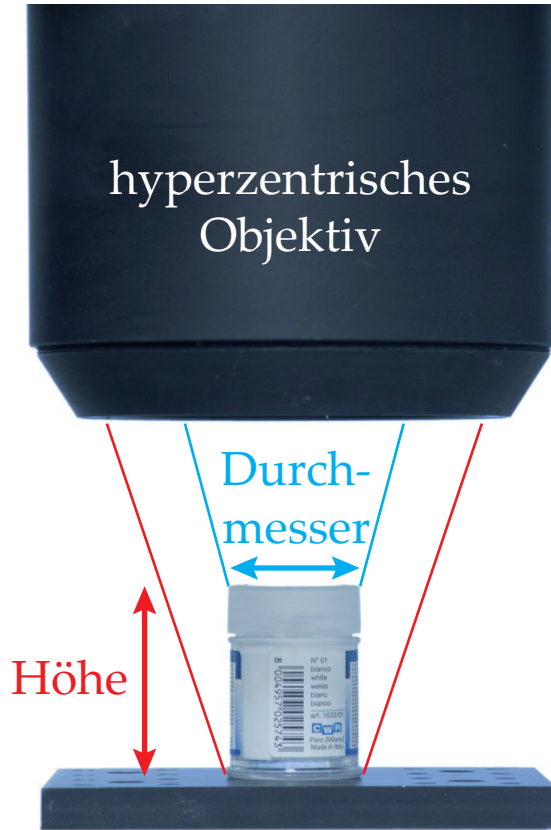
Telezentrische
Perspektive



Hyperzentrische
Perspektive

3.4.6 Perspektive

Beispiel: Hyperzentrisches Objektiv



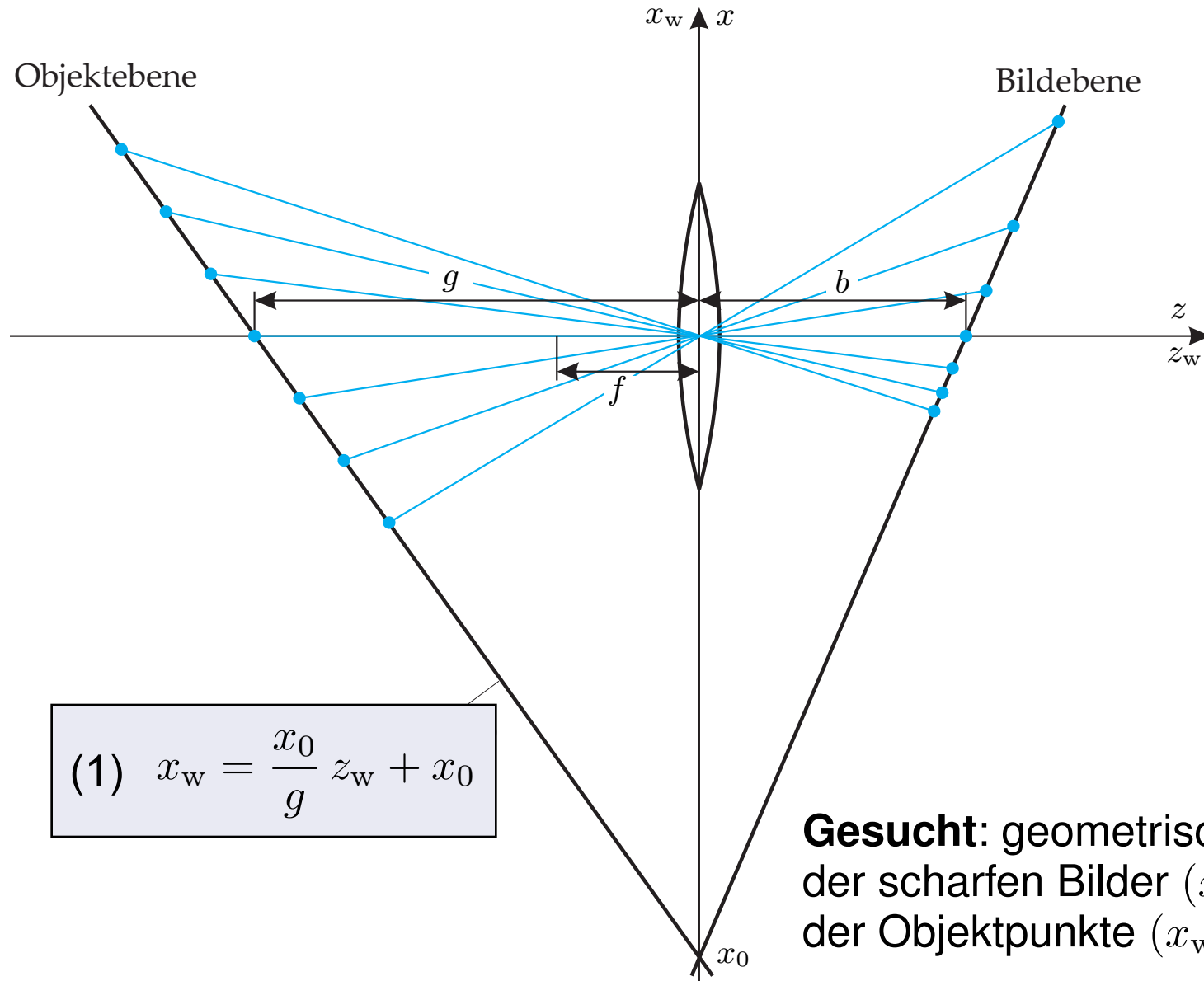
Aufnahmeanordnung



Kamerabild

Quelle: Opto Engineering srl

3.4.7 Abbildung bei verkippten Ebenen



3.4.7 Abbildung bei verkippten Ebenen

■ Abbildungsgleichung:

$$(2) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{-z_w} + \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z_w = \frac{z f}{f - z}$$

■ Vergrößerung:

$$(3) \quad \frac{x_w}{x} = \frac{z_w}{z} \quad \Leftrightarrow \quad x_w = \frac{z_w}{z} x$$

x_w und z_w eliminieren!

■ Ergebnis:

$$x = x_0 \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{f} \right) z + x_0 \quad \triangleq \quad \text{Gerade durch } x_0!$$

Zwei Ebenen im Raum, deren Schnittgerade in der Linsenebene liegt (**Scheimpflug-Bedingung**) und für die ein Punktepaar die Abbildungsgleichung erfüllt, werden insgesamt scharf aufeinander abgebildet.

Eigenschaften:

■ Spezialfall: Parallele Ebenen, Schnitt im Unendlichen

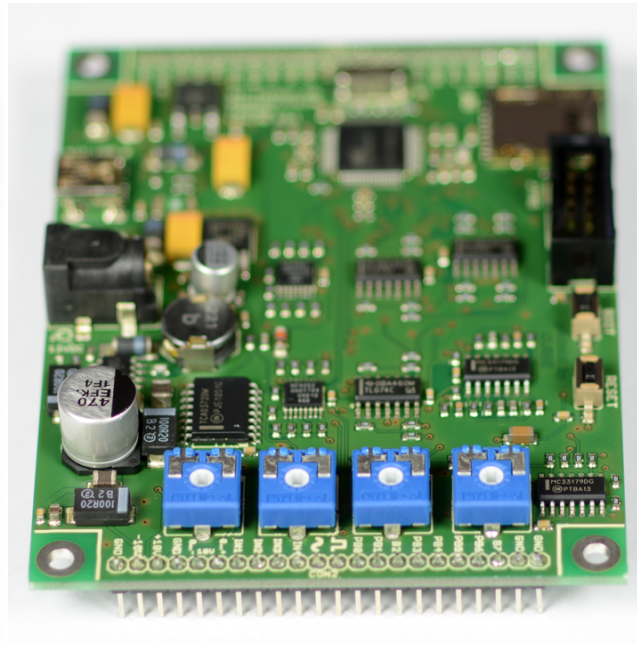
– i. Allg. ortsvarianter Abbildungsmaßstab

3.4.7 Abbildung bei verkippten Ebenen

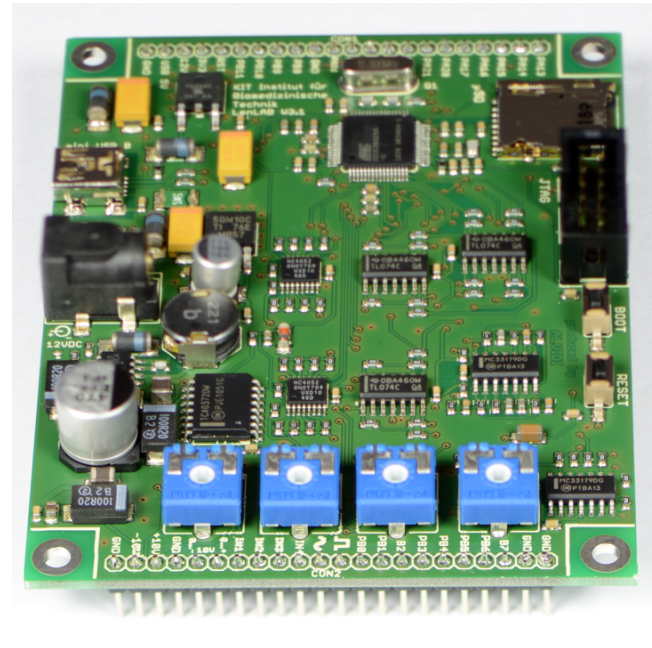
Beispiel 3.5: Scharfe Abbildung verkippter Ebenen



Verschwenktes
Tilt-und-Shift-Objektiv



keine
Verschwenkung

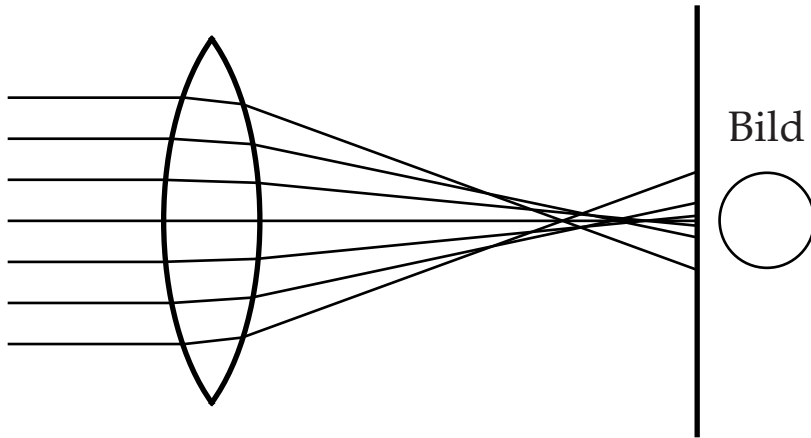


Objektiv
verschwenkt

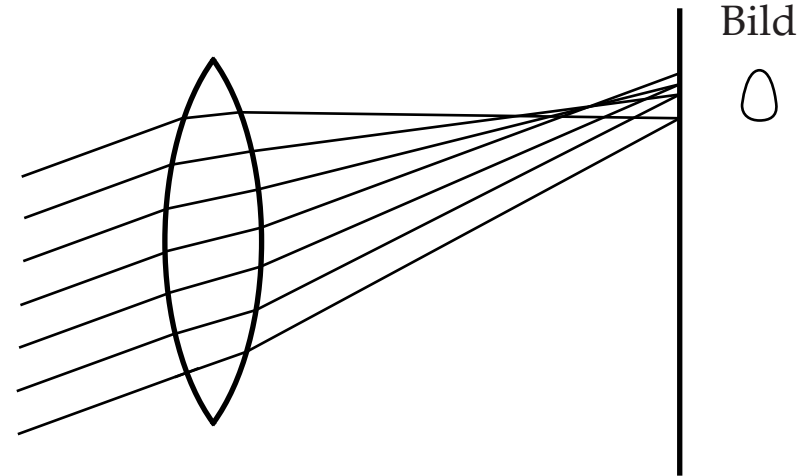
3.4.8 Abbildungsfehler

3.4.8.1 Seidel'sche Aberrationen sphärischer Linsen

- Entstehen durch die Vernachlässigung des kubischen Terms der Sinusfunktion im Brechungsgesetz (Bildfehler 3. Ordnung)



Sphärische Aberration

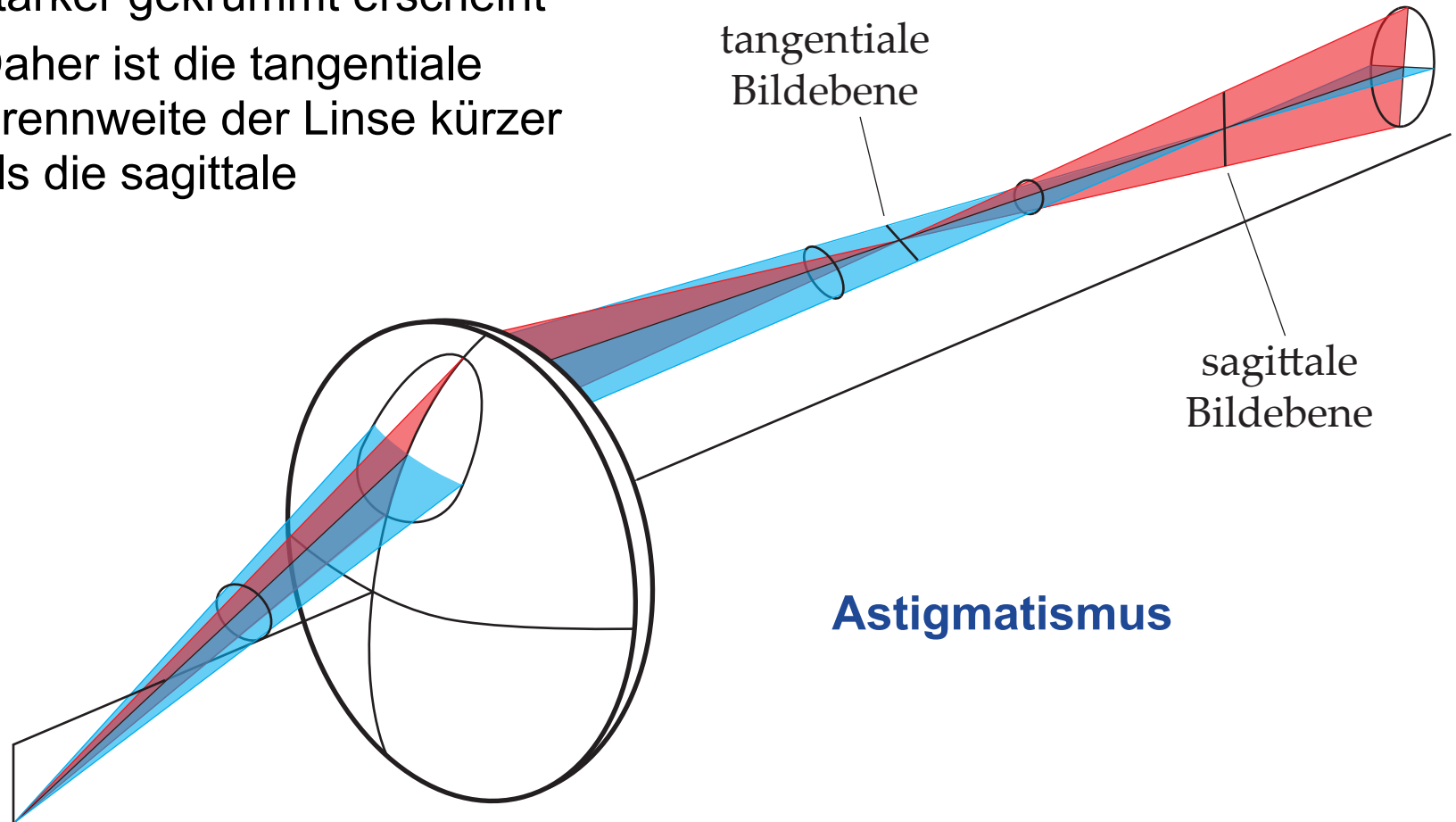


Koma

- Sphärische Aberration (Öffnungsfehler):** Bewirkt, dass ein einfallendes homozentrisches Lichtbündel nicht exakt auf einen Punkt fokussiert wird (Vermeidung durch asphärische Linsen)
- Koma:** Mit zunehmenden Betrag des Einfallswinkels ändert sich die Form unscharfen Bildes (Punkt → Komet mit Schweif)

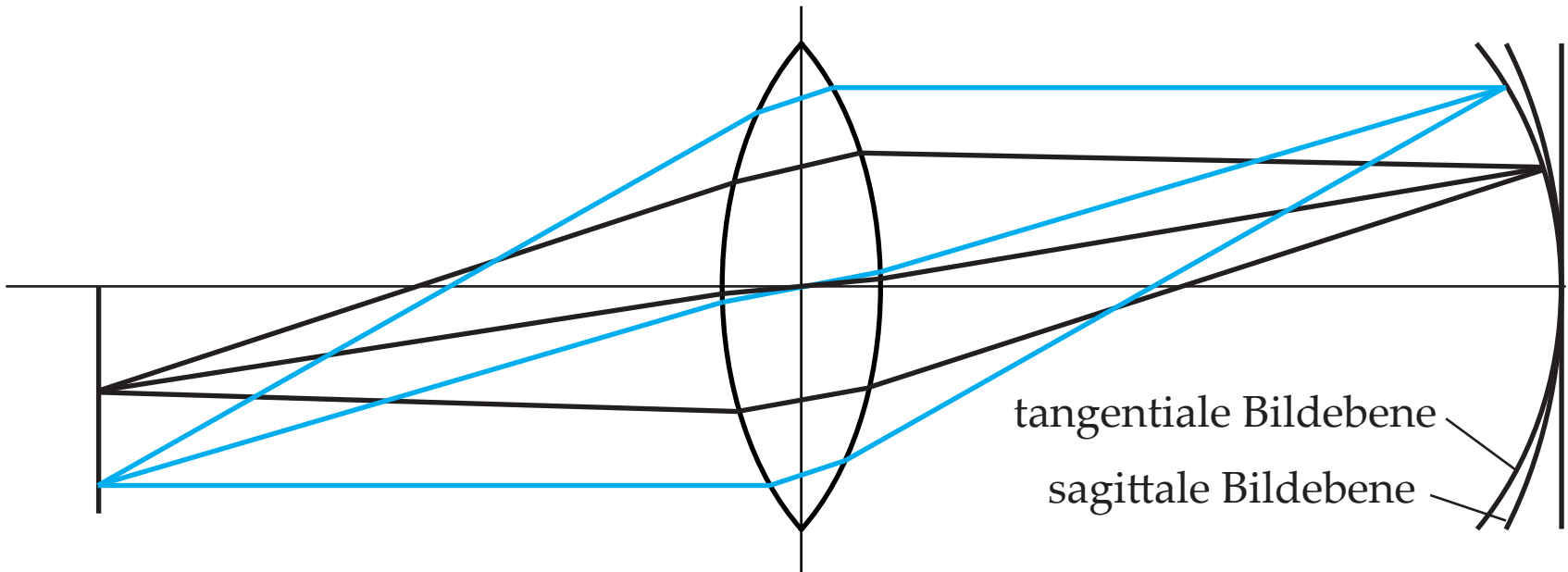
3.4.8 Abbildungsfehler

- **Astigmatismus**: Lichtstrahlen in der **Tangential-** und **Sagittalebene** werden in unterschiedlichem Abstand zur Hauptebene der Linse fokussiert
 - Das **tangentiale Lichtbündel** wird stärker gebrochen, da die Linse stärker gekrümmt erscheint
 - Daher ist die tangentielle Brennweite der Linse kürzer als die sagittale



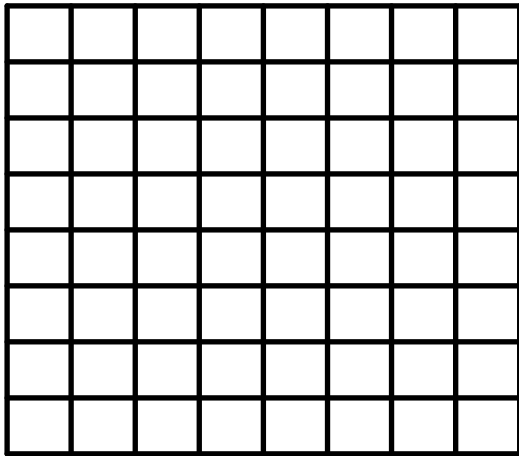
■ Bildfeldwölbung:

- Geometrischer Ort der scharfen Bilder einer Ebene ist – anders als in der Gauß'schen Optik – eine gewölbte und keine ebene Fläche
- Bei Astigmatismus entstehen unterschiedliche Flächen für die Strahlen der Tangential- bzw. Sagittalebene

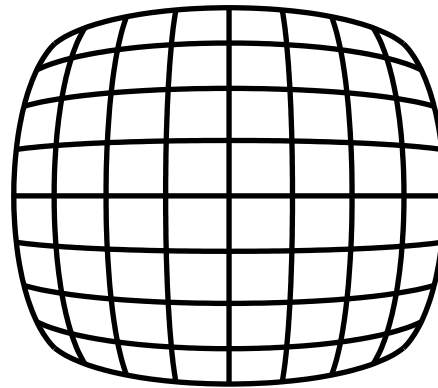


■ Radiale Verzeichnung:

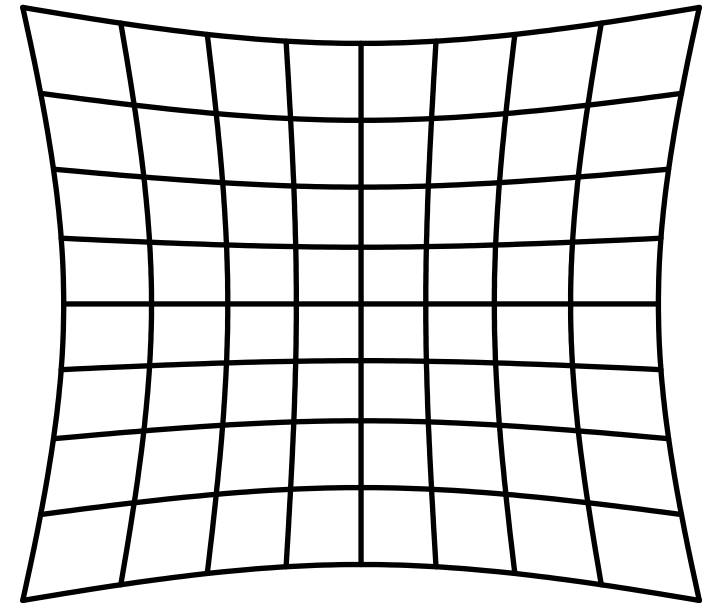
- Ursache: Optiken mit ortsvariantem Abbildungsmaßstab
 - Geraden, die abseits der optischen Achse verlaufen, werden auf gekrümmte Linien abgebildet



Ideale, verzeichnungsfreie Abbildung



Tonnenförmige Verzeichnung



Kissenförmige Verzeichnung

3.4.8 Abbildungsfehler

3.4.8.2 Chromatische Aberration

- Ursache: Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex (materialabhängig)
- Vermeidung durch Verwendung von Linsensystemen bestehend aus Materialien mit unterschiedlicher Dispersion

